ΠΑΡΝΑΣΣΟΣ

ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ

ΕΝ ΤΗ ΑΡΧΑΙΑ ΕΛΛΑΔΙ *

Κύριοι

Ἀρχόμενος σήμερον τῆς ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ διδασκαλίας μου δράττομαι τῆς εὐκαιρίας, ὅπως ἐκφράσω δημοσίᾳ τὴν εὐγνωμοσύνην μου πρὸς τοὺς κυρίους καθηγητὰς τῆς φιλοσοφικῆς σχολῆς διὰ τὴν εὔνουν αὐτῶν ὑπὲρ ἐμοῦ κρίσιν, παρακαλῶ δὲ καὶ ὑμᾶς νὰ ὑποδεχθῆτε εὐμενῶς καὶ νὰ κρίνητε ἐπιεικῶς τὴν σημερινήν μου ὁμιλίαν.

Ἁρμοδιώτατον εἰς τὴν παροῦσαν περίστασιν ἐθεώρησα, κύριοι, νὰ ἐκθέσω ὑμῖν ἐν συντομίᾳ τὰ κυριώτατα ἐκ τῆς ἱστορίας τῆς μαθηματικῆς ἐν τῇ ἀρχαίᾳ Ἑλλάδι· καὶ τοῦτο διὰ λόγους· πρῶτον μὲν ὅτι, Ἕλληνες ὄντες, θεωροῦμεν πάντες τὰ ὑπ' ἐκείνων εὑρημένα ὡς πατρικὴν κληρονομίαν, δεύτερον δέ, διότι τὰ ἔργα αὐτῶν ἐν τῇ μαθηματικῇ κατ' οὐδὲν ὑπολείπονται τῶν λοιπῶν αὐτῶν ἔργων ἐν ταῖς ἄλλαις ἐπιστήμαις καὶ τέχναις, ἐν αἷς ἐπρώτευσαν, ἀλλὰ φέρουσι καθαρὸν τὸν τύπον τῆς ἑλληνικῆς μεγαλοφυΐας, καὶ εἶνε αἰώνιοι μάρτυρες τοῦ ὕψους τῆς διανοίας καὶ τοῦ ἐξόχου ἐπιστημονικοῦ αὐτῶν πνεύματος.

Τὴν ἱστορίαν τῆς μαθηματικῆς ἐν τῇ ἀρχαίᾳ Ἑλλάδι δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν εἰς τρία μέρη· τούτων τὸ μὲν πρῶτον περιλαμβάνει ἅπαντα τὸν πρὸ τοῦ Εὐκλείδου χρόνον, ἐν ᾧ ἡ γεωμετρία, ἡ ἀστρονομία καὶ ἐν γένει ἡ μαθηματικὴ ἐκ τῆς Αἰγύπτου εἰς τὴν Ἑλλάδα ἐλθοῦσα, καὶ εἰς τὸ ἑλληνικὸν ἔδαφος ῥιζοβολήσασα, προέβαινεν ἀπαύστως εἰς τὴν τελειότητα καὶ ἐλάμβανεν ἰδίαν μορφὴν ὑπὸ τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος διαπλασσομένη· τὸ δὲ δεύτερον μέρος, τὸ τῆς ἀκμῆς, ἐκτείνεται ἀπὸ τοῦ 300 μέχρι τοῦ 100 περίπου πρὸ Χριστοῦ· ἐν τούτῳ ἔζησαν οἱ κορυφαῖοι τῆς ἑλληνικῆς μαθηματικῆς, Εὐκλείδης, Ἀρχιμήδης καὶ Ἀπολλώνιος, καὶ ὑπὸ τούτων ἡ μαθηματικὴ προήχθη εἰς τὸ ὕψιστον αὐτῆς σημεῖον· τέλος τὸ τρίτον μέρος, τὸ τῆς παρακμῆς, ἐκτείνεται ἀπὸ τοῦ 100 π. χ. μέχρι τοῦ 5ου ἢ 6ου αἰῶνος μετὰ Χριστόν.

* Λόγος ἐκφωνηθεὶς ὑπὸ τοῦ κ. Ι. Ν. Χατζιδάκη ἐν τῇ ἐνάρξει τῶν παραδόσεων αὐτοῦ ὡς ὑφηγητοῦ ἐν τῷ Ἐθνικῷ Πανεπιστημίῳ τῇ 15 Μαρτίου 1880.

Αἱ ἔννοιαι, τοῦ πλήθους, τοῦ ἀριθμοῦ, καὶ τῶν ἁπλουστάτων γεωμετρικῶν σχημάτων, αἵτινες ἀποτελοῦσι τὴν φυσικὴν βάσιν τῆς μαθηματικῆς, εἶνε βεβαίως ἔμφυτοι εἰς πάντα ἄνθρωπον, εἰς οἱονδήποτε βαθμὸν ἀναπτύξεως καὶ ἂν εὑρίσκηται. Ἀλλ' ἡ ἔρευνα τῶν φυσικῶν τούτων στοιχείων, ἡ μετὰ λόγου ζήτησις τῶν ἰδιωμάτων καὶ τῶν σχέσεων αὐτῶν προαπαιτεῖ ἀνάπτυξίν τινα. Παρὰ τοῖς Ἕλλησιν ἄρχεται κυρίως ἡ ἐπίδοσις εἰς τὰς φυσικὰς ἐπιστήμας καὶ τὴν μαθηματικὴν ἀπὸ τοῦ Θαλοῦ, ὅστις ἔζησε περὶ τὰ 600 π. Χ. καὶ ἦτο ὁ πρῶτος, ὅστις ἤρχισε νὰ ἐρευνᾷ τὰς φυσικὰς τῶν φαινομένων αἰτίας· κατὰ τὸ πρῶτον τοῦτο στάδιον τῆς ἀναπτύξεως ἅπασαι αἱ φυσικαί, αἱ γεωμετρικαὶ καὶ ἀστρονομικαὶ γνώσεις ἦσαν ἀχώριστοι ἀπ' ἀλλήλων. Ἀλλὰ πολὺ πρότερον κατεῖχον οἱ Αἰγύπτιοι, ὧν ὁ πολιτισμὸς εἶνε ἀρχαιότατος, γεωμετρικάς τινας καὶ φυσικὰς γνώσεις, ὧν ἡ ἔκτασις ἀδύνατον νὰ ὁρισθῇ ἀκριβῶς, πάντως ὅμως ὑπερτέρουν κατὰ πολὺ τὰς τῶν Ἑλλήνων ἐπὶ τῶν χρόνων τοῦ Θαλοῦ, διὰ τοῦτο οἱ τότε λεγόμενοι σοφοὶ τῆς Ἑλλάδος ἐπεσκέπτοντο τὴν Αἴγυπτον καὶ ἐπὶ μακρὸν χρόνον διέτριβον ἐν αὐτῇ διδασκόμενοι. Καὶ πάντες δὲ οἱ Ἕλληνες συγγραφεῖς ὁμοφώνως ἀποδίδουσι τὰς ἀρχὰς τῆς γεωμετρίας εἰς τοὺς Αἰγυπτίους. Ἀλλὰ τὸ ζήτημα τοῦ πολιτισμοῦ τῶν Αἰγυπτίων, τῆς ἐκτάσεως καὶ τοῦ καθόλου χαρακτῆρος αὐτοῦ, δὲν εἶνε τοῦ παρόντος· ἡμᾶς ἐνδιαφέρει κυρίως τοῦτο νὰ μάθωμεν πόσα ἐκ τῆς γεωμετρίας καὶ ἐν γένει ἐκ τῆς μαθηματικῆς παρέλαβον οἱ Ἕλληνες ἐξ αὐτῶν ; καὶ ἐν τίνι καταστάσει; τοῦτο δὲ ἀσφαλῶς θὰ δυνηθῶμεν νὰ μάθωμεν ἐξ ἐκείνων, ἅτινα οἱ παρ' αὐτοῖς μαθητεύσαντες, ὧν ἐπιφανέστατοι εἶνε, ὁ Θαλῆς καὶ ὁ Πυθαγόρας, ἐλθόντες ὕστερον ἐδίδαξαν ἐν ταῖς σχολαῖς αὐτῶν· διότι, καὶ ἂν μηδὲν ὑπ' αὐτῶν εὑρημένον δεχθῶμεν, ἀλλὰ πάντα τῶν Αἰγυπτίων ὑποθέσωμεν, ὅπερ ἀπιθανώτατον, πάλιν ἀγόμεθα εἰς τὸ ἀσφαλὲς συμπέρασμα, ὅτι οἱ Ἕλληνες παρέλαβον μέν τινας γνώσεις γεωμετρικὰς καὶ ἀριθμητικὰς ἐκ τῶν Αἰγυπτίων, ἀλλὰ μόλις ἐν τοῖς στοιχειωδεστάτοις περιοριζομένας, καὶ ταύτας ἐν καταστάσει οὐχὶ ἐπιστημονικῇ, ἀλλ' ὡς εἶδός τι πρακτικῶν γνώσεων· ἡ δὲ ἐπιστημονικὴ αὐτῶν διάπλασις, ἡ λογικὴ αὐτῶν ἀπ' ἀλλήλων ἐξάρτησις, ἡ εὕρεσις τῶν φυσικῶν ἀρχῶν, ἐξ ὧν λογικῶς δι' ἀποδείξεων συνάγονται, ἐν ἑνὶ λόγῳ, ἡ εἰς καθαρὰν ἐπιστήμην ἀνύψωσις αὐτῶν εἶνε ἑλληνικὸν ἔργον.

Οἱ ἱστορικοὶ ἀναφέρουσιν ὅτι ὁ Θαλῆς ἀπέδειξε τὴν ἰσότητα τῶν δύο γωνιῶν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ὡς καὶ τὴν ἰσότητα τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν [1], πρὸς τούτους ὅτι ἐμέτρησε τὸ ὕψος τῶν πυραμίδων ἐκ τῆς σκιᾶς αὐτῶν, [2] καθ' ἣν στιγμὴν ἡ σκιὰ ῥάβδου ὀρθίας ἦτο ἴση τῷ μήκει αὐτῆς.

1 Εὔδημος παρὰ τῷ Πρόκλῳ· σχόλια εἰς τὴν πρότασιν 15 καὶ 26, τοῦ I βιβλίου τοῦ Εὐκλείδου.

2 Ἱερώνυμος ὁ Ῥόδιος παρὰ Διογένει τῷ Λαερτίῳ 1, 27.

ἀναφέρουσι πρὸς τούτοις ὅτι ἤξευρε νὰ μετρῇ τὴν ἀπόστασιν τῶν πλοίων ἀπὸ τῆς παραλίας, ἄγνωστον ὅμως διὰ τίνος τρόπου: τοιαῦται ἦσαν αἱ μαθηματικαὶ ἀνακαλύψεις τοῦ Θαλοῦ.

Μεταγενέστερος τοῦ Θαλοῦ ἦτον ὁ Πυθαγόρας, ὅστις ἤκμασε περὶ τὰ 550 π. Χ. οὗτος διέτριψεν ἐπὶ πολὺν χρόνον ἐν Αἰγύπτῳ, ἐπανελθὼν δὲ συνέστησε σχολήν, κατ' ἀρχὰς μὲν ἐν Σάμῳ τῇ πατρίδι αὐτοῦ, ὕστερον δὲ ἐν Ἰταλίᾳ. Οὗτος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πατὴρ τῆς μαθηματικῆς ἐν Ἑλλάδι. Κατὰ τὰς μαρτυρίας τῶν ἀρχαίων οἱ μαθηταὶ τοῦ Πυθαγόρου ἀπέδειξαν [1] τὸ γενικὸν θεώρημα, ὅτι αἱ τρεῖς γωνίαι παντὸς τριγώνου, ἀθροιζόμεναι ποιοῦσι δύο ὀρθάς, ἐνῷ οἱ παλαιότεροι ἀπεδείκνυον τὴν πρότασιν ταύτην χωριστὰ δι' ἕκαστον εἶδος τριγώνων· ἤτοι διὰ τὰ ἰσόπλευρα, ἰσοσκελῆ καὶ σκαληνά. Εἰς τὸν Πυθαγόραν ἀποδίδεται τὸ πασίγνωστον θεώρημα ἐπὶ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, ὅπερ εἶνε ἡ πηγὴ πάσης μετρητικῆς προτάσεως· εἰς αὐτὸν ἀποδίδεται [2] ἡ εὕρεσις τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν, καὶ ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος, ὅτι ἡ διαγώνιος παντὸς τετραγώνου εἶνε ἀσύμμετρος πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ. [3] Πρὸς τούτοις ἀναφέρει Ἥρων ὁ Ἀλεξανδρεὺς ὅτι ὁ Πυθαγόρας πρῶτος εὗρεν ὀρθογώνια τρίγωνα, ὧν αἱ πλευραὶ εἶνε σύμμετροι ἀλλήλαις καὶ ὧν τὸ ἁπλούστατον εἶνε τὸ ἔχον πλευρὰς 3, 4 καὶ 5 μονάδας μήκους. Ἀλλὰ καὶ περὶ τοὺς ἀριθμοὺς ἠσχολήθη ὁ Πυθαγόρας· γνωστὸν δὲ εἶνε ὅτι ἀπέδιδον εἰς αὐτοὺς μυστηριώδεις δυνάμεις καὶ ἰδιότητας, ἅστινας πιθανώτατα ἔμαθε παρὰ τῶν Αἰγυπτίων ἱερέων· εἰς αὐτὸν τέλος ἀποδίδεται ὑπὸ τοῦ Νικομάχου καὶ ἡ μόρφωσις τῶν ἀναλογιῶν.

Μετὰ τὸν θάνατον τοῦ Πυθαγόρου οἱ μαθηταὶ αὐτοῦ, ἀνὰ πᾶσαν τὴν Ἑλλάδα διασκορπισθέντες ἕνεκα πολιτικῶν ταραχῶν, διέδωκαν τὰς μαθηματικὰς αὐτῶν γνώσεις καὶ ἔκτοτε κυρίως ἄρχεται ἡ ἀμιγὴς ἑλληνικὴ μαθηματική.

Ἐπιστημότατος τῶν Πυθαγορικῶν μαθηματικῶν ἦτο ὁ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος παρὰ τὰ 450 π. Χ. Διηγοῦνται [4] περὶ αὐτοῦ ὅτι κατ' ἀρχὰς ἐπεχείρησεν ἐμπόριον, ἀλλ' ὅτι ἁπλοϊκώτατος ὤν, ἠπατήθη ὑπ' ἄλλων· ἀπώλεσε πᾶσαν τὴν περιουσίαν του· ὅθεν ἐλθὼν εἰς Ἀθήνας καὶ ἀκούσας ποτὲ ἔν τινι σχολῇ, τοσοῦτον ἐθέλχθη ὑπὸ τῆς γεωμετρίας, ὥστε διαγνώσας ὀρθότερον τὴν ἑαυτοῦ φύσιν ἐπεδόθη ὅλος εἰς τὴν σπουδὴν τῆς γεωμετρίας καὶ κατέστη εἷς τῶν σπουδαιοτάτων μαθηματικῶν. Οὗτος πρῶτος, κατὰ τὴν μαρτυρίαν τοῦ Εὐδήμου, [5] συνέγραψε βιβλίον γεωμε-

1 Εὔδημος παρὰ Πρόκλῳ, σχόλ. εἰς τὴν πρ. 32.

2 Εὔδημος παρὰ τῷ Πρόκλῳ.

3 Πρόκλος, σχόλ. 1.

4 Ἀριστοτέλης Ἠθικ. εἰς Εὐδ. 1, 7 c. 14.

5 Εὔδημος παρὰ Πρόκλῳ p. 19.

τρίας· τὸ βιβλίον τοῦτο δὲν διεσώθη μέχρις ἡμῶν, ἀλλ' ἔκτινων τεμαχίων ἄλλου μαθηματικοῦ ἔργου τοῦ Ἱπποκράτους εἰκάζομεν ὅτι ἡ γεωμετρία εἶχεν ἤδη ἐπ' αὐτοῦ ἀρκούντως προχωρήσει, οὐ μόνον κατὰ τὸ ποσὸν τῶν θεωρημάτων, ἀλλὰ καὶ κατὰ τὴν λογικὴν τῶν μερῶν αὐτῆς ἐξάρτησιν. Ἐν τοῖς τεμαχίοις τούτοις εὑρίσκεται κατὰ πρῶτον ἡ θεωρία τῶν ὁμοίων τριγώνων, ἀλλὰ μόνον τῶν ἰσοσκελῶν. Ὁ Ἱπποκράτης ἀπέδειξε καὶ τὴν πρότασιν, ὅτι δύο κύκλοι εἶνε πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων αὐτῶν· ἐπεχείρησε δὲ καὶ τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου καὶ δὲν ἠδυνήθη μὲν νὰ εὕρῃ τετράγωνον ἴσον τῷ κύκλῳ, ἀλλ' εὗρε, πρῶτος αὐτός, καμπυλόγραμμον χωρίον ἰσοδύναμον εὐθυγράμμῳ· εἶνε ἀληθὲς ὅτι ἡ μέθοδος, ἐξ ἧς ἐπορίσθη τὸν τετραγωνισμὸν τῶν μηνίσκων του ὁ Ἱπποκράτης, δὲν δύναται νὰ ὀνομασθῇ τετραγωνισμός, οὐδὲ ἔχει τι κοινὸν μετὰ τῆς ὕστερον ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους ἀναπτυχθείσης μεθόδου, δι' ἧς τὸ καμπυλόγραμμον χωρίον ἀναλύεται εἰς ἄπειρα τὸ πλῆθος μέρη καὶ τοιαῦτα, ὥστε νὰ ἀνακαλύπτηται εὐκόλως τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε τοιούτων μερῶν· ἀλλ' ὁπωσδήποτε ἡ ἀνακάλυψις αὕτη τοῦ Ἱπποκράτους ἦτο σπουδαιοτάτη δι' ἐκείνην τὴν ἐποχήν.

Ἤδη ἐπὶ τῶν χρόνων τοῦ Ἱπποκράτους ἤρχισαν νὰ ἀσχολῶσι τοὺς γεωμέτρας προβλήματά τινα, μεγάλως συντελέσαντα εἰς τὴν περαιτέρω ἀνάπτυξιν καὶ μόρφωσιν τῆς γεωμετρίας· ἦσαν δὲ ταῦτα: ὁ διπλασιασμὸς τοῦ κύβου, ἡ εὕρεσις δύο μέσων ἀναλόγων δύο εὐθειῶν δεδομένων, ἡ τριχοτόμησις τῆς γωνίας, καὶ τέλος ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου. Ὁ Ἱπποκράτης ἔδειξε τὴν ὑπάρχουσαν σχέσιν μεταξὺ τῶν δύο πρώτων προβλημάτων, καθ' ἣν ὁ διπλασιασμὸς τοῦ κύβου ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν δύο μέσων ἀναλόγων· τοῦ δὲ προβλήματος τούτου λύσιν τινὰ εὗρε πρῶτος ὁ διάσημος μαθηματικὸς καὶ ἀστρονόμος Ἀρχύτας ὁ Ταραντῖνος, Πυθαγόρειος καὶ οὗτος. Ἀλλὰ τῶν μὲν πρώτων προβλημάτων ἡ δυσκολία συνίστατο εἰς τοῦτο, ὅτι ὁ κύκλος καὶ ἡ εὐθεῖα γραμμή, ἅτινα μόνα μέχρι τοῦδε ἐθεώρουν, δὲν ἐξήρκουν πρὸς λύσιν αὐτῶν: ἀπῃτοῦντο νέαι καμπύλαι, ὧν εὑρεθεισῶν, ἐλύθησαν: ὁ δὲ τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου παρεῖχε δυσκολίας ὅλως διαφόρου φύσεως· διότι ἀπήτει, ὡς καὶ ὁ τετραγωνισμὸς παντὸς ἐν γένει καμπυλογράμμου χωρίου, νέας μεθόδους, ἀγνώστους τότε, καὶ εἰσήγαγεν εἰς τὴν μαθηματικὴν νέας ἐννοίας, οὐχὶ ἐντελῶς ὡρισμένας καὶ ἀντιρρήσεων ἀπηλλαγμένας· μάλιστα δὲ τὴν ἔννοιαν τῆς ἐπ' ἄπειρον διαιρέσεως τῶν συνεχῶν μεγεθῶν. Ἀλλ' αἱ νέαι αὗται ἔννοιαι κατεπολεμήθησαν σφοδρῶς ὑπὸ τῶν τότε ἀκμαζόντων σοφιστῶν, οἵτινες εὕρισκον ἀντιφάσεις καὶ παράδοξα εἰς πᾶσαν ἔννοιαν ἐγκλείουσαν τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου· οἷαι εἶνε αἱ τῆς συνεχείας, τῆς κινήσεως, τῆς ἐπ' ἄπειρον διαιρέσεως τῶν μεγεθῶν, καὶ ὅσαι τοιαῦται. Πασίγνωστα εἶνε τὰ παράδοξα Ζήνωνος τοῦ Ἐλεάτου ἐπὶ τῆς κινήσεως, ὧν βάσις εἶνε, ὑπὸ οἱανδήποτε μορφὴν καὶ ἂν παρουσιάζωνται, ἡ πρότασις ὅτι, εἰς τὸ πεπερασμένον δὲν δύναται νὰ περιέχηται τὸ ἄπειρον. Τινὲς τῶν σοφιστῶν τότε περιέπεσαν εἰς τὴν ἰδέαν, νὰ μὴ παραδέχωνται τὴν ἐπ' ἄπειρον διαίρεσιν τῶν μεγεθῶν, καὶ κατήντησαν νὰ θεωρῶσι τὰ συνεχῆ ποσὰ ὡς συγκείμενα ἐκ μερῶν ἀτόμων ἐλαχίστων· ὁμοίως δὲ καὶ τὰς καμπύλας γραμμὰς ὡς συγκειμένας ἐξ εὐθειῶν ἐλαχίστων ἢ ἀπειροστῶν ἀτόμων. Εἷς τούτων, 'Αντιφῶν καλούμενος, ἐκ τῆς ἐσφαλμένης ταύτης ἰδέας ὁρμώμενος, ἔφθασεν εἰς τὴν θεμελιώδη ἰδέαν, ἐφ' ἧς στηρίζεται ὁ τετραγωνισμὸς τῶν καμπυλογράμμων χωρίων. Οὗτος εἶπεν, ὅτι ἐὰν εἰς τὸν κύκλον ἐγγραφῇ τετράγωνον, εἶτα ὀκτάγωνον κανονικόν, εἶτα δεκαεξάγωνον καὶ καθεξῆς, θὰ εὑρεθῇ ποτε ἐγγεγραμμένον πολύγωνον, ἔχον μέγαν τινὰ ἀριθμὸν πλευρῶν καὶ ἐφαρμόζον ἐπὶ τὸν κύκλον, διότι ἡ περιφέρεια σύγκειται ἐξ εὐθειῶν γραμμῶν ἀπειροστῶν· ἐπειδὴ δὲ δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τετράγωνον ἴσον οἱῳδήποτε δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἕπεται ὅτι θὰ εὕρωμεν καὶ τετράγωνον ἴσον τῷ κύκλῳ. Τὸ συμπέρασμα, ὡς βλέπομεν, ἦτο ἐσφαλμένον, καὶ κατεπολεμήθη ἀμέσως διὰ τῆς παρατηρήσεως ὅτι, ὅσον μικραὶ καὶ ἂν γίνωσιν αἱ πλευραὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, οὐδέποτε ἐφαρμόζουσιν ἐπὶ τὸν κύκλον· ἀλλ' ἡ ἰδέα τῆς ἐγγραφῆς καὶ ἡ ἐξ αὐτῆς προκύπτουσα βαθμιαία τοῦ κύκλου ἐξάντλησις, ἦτο ὀρθοτάτη, καὶ ἀναπτυχθεῖσα κατόπιν ὑπὸ τοῦ 'Αρχιμήδους ἀποτελεῖ τὴν βάσιν τῆς μεθόδου τῆς ἐξαντλήσεως.

Εἰς τὴν περαιτέρω ἀνάπτυξιν τῆς μαθηματικῆς σπουδαιότατα ἐπέδρασαν αἱ ἐπὶ τῶν θεμελιωδῶν αὐτῆς ἐννοιῶν ἀντιρρήσεις καὶ παραδοξολογίαι, ἅς τινας ἐφεῦρεν ἡ ὀξεῖα τῶν σοφιστῶν διαλεκτική. Ἔκτοτε ἡ μαθηματική, μάλιστα δὲ ἡ γεωμετρία, μετεσχηματίσθη εἰς λογικῶς ἀπρόσβλητον φρούριον· αἱ ἀρχαὶ αὐτῆς, ἢ τὰ ἀξιώματα, ἀφ' ὧν ἀναπτύσσεται, ἐξητάσθησαν λεπτομερέστερον καὶ ἔλαβον τοιαύτην μορφήν, ὥστε νὰ μὴ ἐπιδέχωνται μηδεμίαν ἀντίρρησιν· αἱ ἀόριστοι καὶ ἀσαφεῖς ἔννοιαι τοῦ ἀπειροστοῦ, τῆς συνεχείας, τῆς συνεχοῦς μεταβολῆς, τοῦ μεγέθους καὶ ὅσα τοιαῦτα, ἀπεκλείσθησαν ἀπὸ τῆς μαθηματικῆς καὶ αἱ προτάσεις ἔλαβον τὴν συνθετικὴν λεγομένην μορφήν. Ἐνῷ ἐπὶ τοῦ Ἱπποκράτους οὐδεμία ἐγίνετο διάκρισις μεταξὺ ἀποδείξεως καὶ κατασκευῆς, οὐδὲ προετάσσοντο τὰ ἀξιώματα, ὀλίγῳ ὕστερον, ὁ δεύτερος γράψας στοιχεῖα γεωμετρίας Λέων, σύγχρονος τοῦ Πλάτωνος, διῄρεσε τὰ μέρη τῆς γεωμετρικῆς προτάσεως εἰς τὰ ἑξῆς: ἔκθεσιν, προσδιορισμόν, κατασκευήν, ἀπόδειξιν, καὶ συμπέρασμα. Ὁ αὐτὸς δὲ ἐφεῦρε καὶ τοὺς διορισμοὺς τῶν προβλημάτων· τουτέστι τὰ προσόντα, ἅτινα πρέπει νὰ ἔχωσι τὰ δεδομένα, ἵνα ᾖ δυνατὸν τὸ πρόβλημα. Ἐκ τῆς λεπτομεροῦς ταύτης διακρίσεως βλέπομεν, ὅτι ἡ συνθετικὴ μέθοδος εἶχεν ἤδη προαχθῆ εἰς τὸ τέλειον. Ἡ μέθοδος αὕτη, ὑπὸ τὴν ἔποψιν τῆς πειθοῦς, ἣν ἡ ἀπόδειξις σκοπεύει εἶνε τελειοτάτη· διότι οὐδεμίαν ἐπιτρέπει ἀμφιβολίαν εἰς τὸ πνεῦμα περὶ τῆς ἀληθείας τοῦ ἀποδεικνυομένου· ἀλλ' ἔχει καὶ τὸ μειονέκτημα, ὅτι δὲν εὐχαριστεῖ ἐντελῶς τὸν νοῦν· διότι οὐδεμίαν δίδει νύξιν περὶ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν εὑρέθη ἡ προκειμένη ἀλήθεια, οὐδὲν δεικνύει ἴχνος τῶν γενομένων συλλογισμῶν εἰς τὴν εὕρεσιν αὐτῆς, καὶ ἑπομένως δὲν ὁδηγεῖ ἀμέσως τὸν νοῦν εἰς τὴν ζήτησιν καὶ εὕρεσιν ἄλλων ἀληθειῶν· σκοπεύει νὰ πείσῃ μᾶλλον ἢ νὰ διδάξῃ.

Τὴν ἐναντίαν μέθοδον, τὴν λεγομένην ἀναλυτικήν, ἀνέπτυξεν [1] ὁ Πλάτων, ὅστις ἠσχολήθη περὶ τὰς μεθόδους μᾶλλον καὶ τὰς θεμελιώδεις καὶ μαθηματικὰς ἰδέας, ἢ εἰς ἀνακαλύψεις μερικῶν θεωρημάτων. Ὅλως ἄγνωστος δὲν δύναται νὰ ὑποτεθῇ ἡ μέθοδος αὕτη καὶ πρὸ τοῦ Πλάτωνος· διότι βεβαίως, ὡς τὴν μόνην κατάλληλον πρὸς τὴν ζήτησιν καὶ εὕρεσιν τῆς ἀληθείας, μεταχειρίζοντο οἱ μαθηματικοὶ πρὸς εὕρεσιν τῶν θεωρημάτων αὐτῶν· ἀλλ' ἐνῷ ἐκεῖνοι ἀμυδρὰν καὶ ἀσαφῆ εἶχον ἔννοιαν αὐτῆς, ὁ Πλάτων ἀνύψωσεν εἰς τελείαν μέθοδον. Ἐν αὐτῇ ὁ νοῦς, ἀναχωρῶν ἀπὸ τοῦ ζητουμένου φθάνει εἰς τὰς ἀρχὰς ἢ εἴς τι ἀποδεδειγμένον ἤδη. Καὶ δὲν ἔχει μὲν ἡ μέθοδος αὕτη τὸ ῥηθὲν τῆς συνθετικῆς μειονέκτημα, ἀλλ' ὑπολείπεται πολὺ ἐκείνης, κατὰ τὴν βεβαιότητα, ἣν παρέχει· διότι ἡ μὲν συνθετικὴ ἀποδεικνύει ὅτι τὸ θεωρούμενον εἶνε ἀναγκαῖον ἀκολούθημα τῶν ἀρχῶν, ὥστε ὁ μὴ παραδεχόμενος αὐτό, μηδὲ ἐκείνας πρέπει νὰ παραδέχηται· ἡ δὲ ἀναλυτικὴ ἀποδεικνύει ὅτι ἐκ τῆς παραδοχῆς τοῦ θεωρουμένου οὐδεμία προκύπτει ἀντίφασις· διότι συνδυάζουσα αὐτὸ μετ' ἄλλων, ἤδη ἀποδεδειγμένων, φθάνει εἴς τι ἀληθές, τουτέστι δεικνύει ἐν γένει τὸ δυνατὸν τοῦ πράγματος. Διὰ ταῦτα οἱ Ἕλληνες μαθηματικοὶ ἐν τῇ ἐκθέσει τῶν ὑπ' αὐτῶν εὑρημένων, πάντοτε ποιοῦνται χρῆσιν τῆς συνθετικῆς μεθόδου· ἐὰν δέ ποτε, πρὸς ὁδηγίαν ἴσως τοῦ ἀναγιγνώσκοντος ἐκθέτωσι τὴν λύσιν προβλήματός τινος ἀναλυτικῶς, οὐδέποτε παραλείπουσι καὶ τὴν σύνθεσιν τοῦ αὐτοῦ προβλήματος.

Αἱ περὶ τῆς μαθηματικῆς ἐν γένει ἰδέαι τοῦ Πλάτωνος εἶνε ἀρκούντως γνωσταί. Κατ' αὐτὸν ἡ μαθηματικὴ κεῖται μεταξὺ τοῦ ὅλως ἰδανικοῦ καὶ τῆς ὅλως ἐστερημένης ἰδεῶν ὕλης· τὴν γεωμετρίαν λέγει ἐν τῇ πολιτείᾳ «γνῶσιν τοῦ ἀεὶ ὄντος», ὅταν σπουδάζηται οὐχὶ πρὸς τὰς χρείας τοῦ βίου ἀλλὰ μεταφέρηται ἐκ τῆς ὕλης εἰς τὸ κράτος τῶν ἰδεῶν· διότι ἡ ἐκ τῶν ἐφαρμογῶν τῆς μαθηματικῆς προκύπτουσα εἰς τὰς χρείας τοῦ βίου ὠφέλεια εἶνέ τι δευτερεῦον· τὸ σπουδαιότατον εἶνε, ὅτι αἱ μαθηματικαὶ γνώσεις ἀπασχολοῦσι τὸ πνεῦμα ἀπὸ τῶν ὑλικῶν, καὶ καθιστῶσιν αὐτὸ ἱκανώτερον νὰ ἐννοήσῃ τὸ ἰδανικόν· ἀλλαχοῦ δὲ πάλιν παρατηρεῖ ὅτι, οἱ μὲν φύσει πρὸς τὰ μαθηματικὰ ῥέποντες, γίνονται δι' αὐτῶν ὀξεῖς εἰς πάντα τὰ μαθήματα, οἱ δὲ βραδεῖς πάλιν γίνονται ὀξύτεροι ἑαυτῶν.

[1] Πρόκλος, σχολ. εἰς τὴν Ι.

Διὰ ταῦτα ἐθεώρει τὴν σπουδὴν τῆς γεωμετρίας ἀπαραίτητον προπαιδείαν πρὸς τὴν φιλοσοφίαν καὶ ἐπὶ τῆς Ἀκαδημείας ἐπέγραψεν, ὡς λέγουσι: «Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω μου τὴν στέγην.» Μαθηματικαὶ καὶ ἀστρονομικαὶ γνώσεις εἶναι ἀπαραίτητα προσόντα παντός, ὅστις θέλει ἐν τῇ πολιτείᾳ τοῦ Πλάτωνος νὰ συγκαταριθμῆται μετὰ τῶν πεπαιδευμένων.

Ἐκ τῶν συγχρόνων τοῦ Πλάτωνος μαθηματικῶν ἄξιος ἰδιαιτέρας μνείας εἶνε ὁ ἐκ τῆς Κνίδου Εὔδοξος, ὅστις πολλὰ γεωμετρικὰ θεωρήματα ἐγενίκευσε καὶ τὰ μέτρα τῶν κώνων καὶ τῶν πυραμίδων εὗρεν, ὡς μαρτυρεῖ ὁ Ἀρχιμήδης ἐν τοῖς περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου βιβλίοις του. Εἰς τὸν Εὔδοξον ἀποδίδουσί τινες καὶ τὴν ἐν τῷ Εὐκλείδῃ, 5ῳ βιβλίῳ, εὑρισκομένην ἀρίστην θεωρίαν τῶν ἀναλογιῶν· κατὰ δὲ τὴν μαρτυρίαν τοῦ Εὐτοκίου[1], ὁ Εὔδοξος ἔλυσε καὶ τὸ πρόβλημα τῶν δύο μέσων ἀναλόγων, διά τινων καμπύλων γραμμῶν ὑπ' αὐτοῦ εὑρεθεισῶν.

Οἱ μαθηταὶ τοῦ Πλάτωνος ὑπὸ τὴν ὁδηγίαν τοῦ διδασκάλου αὐτῶν ἐξέτεινον τὰ ὅρια τῆς γεωμετρίας. Θεύδιός τις ἐκ Μαγνησίας ἔγραψε στοιχεῖα γεωμετρίας περιεκτικώτερα ἢ τὰ προηγούμενα, καὶ ἐν οἷς προέταξε τὰς ἀρχὰς ἢ τὰ ἀξιώματα τῆς γεωμετρίας· τὴν δὲ τάξιν ταύτην ἠκολούθησεν ὕστερον καὶ ὁ Εὐκλείδης καὶ πάντες οἱ μετ' αὐτόν. Ἕτερος δὲ μαθητὴς τοῦ Πλάτωνος, ὁ Μέναιχμος, ἐφεῦρε τὰς τρεῖς τοῦ κώνου τομάς, τῶν ὁποίων ἡ ἔρευνα παρήγαγε τὴν ἀνωτέραν γεωμετρίαν. Ἐν τῇ σχολῇ τοῦ Πλάτωνος ἐπλάσθη καὶ εἰσήχθη εἰς τὴν γεωμετρίαν καὶ ἡ ἔννοια τῶν γεωμετρικῶν τόπων, ἐξ ἧς προέκυψε νέα σπουδαιοτάτη μέθοδος πρὸς λύσιν τῶν γεωμετρικῶν προβλημάτων. Διὰ τῶν γεωμετρικῶν τόπων ἔλυσεν ὁ Μέναιχμος τὸ πρόβλημα τῶν δύο μέσων ἀναλόγων· καὶ ὁ Πλάτων αὐτὸς ἔδωκε τοῦ αὐτοῦ προβλήματος λύσιν τινά, μηχανικήν, ἣν ἀναφέρει ὁ Πάππος. Ὁ δὲ Δεινόστρατος, ἀδελφὸς τοῦ Μεναίχμου, ἐπενόησε τὴν τετραγωνίζουσαν καμπύλην, δι' ἧς διαιρεῖται δοθεῖσα γωνία εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη. Οὕτως ηὐρύνετο μικρὸν κατὰ μικρὸν ὁ κύκλος, ἐντὸς τοῦ ὁποίου ἐκινοῦντο αἱ γεωμετρικαὶ ἔρευναι, νέαι ἰδιότητες τῶν νέων καμπύλων, καὶ μάλιστα τῶν κωνικῶν τομῶν, εὑρίσκοντο, καὶ διεπλάσσετο ἡ ὀνομασθεῖσα ἀνωτέρα γεωμετρία, πρὸς διάκρισιν τῆς γεωμετρίας, ἐν ᾗ μόνον ὁ κύκλος καὶ ἡ εὐθεῖα θεωροῦνται, καὶ ἥτις ἔλαβε τὸ ὄνομα τῶν στοιχείων.

Τοιαύτη ἦτο ἡ κατάστασις τῆς μαθηματικῆς κατὰ τὴν 4ην π. Χ. ἑκατονταετηρίδα ἤτοι ὀλίγον πρὸ τοῦ Εὐκλείδου.

Περὶ τοῦ βίου τοῦ Εὐκλείδου ὀλίγιστα γνωρίζομεν. Ὁ Πρόκλος ἐν τοῖς ὑπομνήμασιν αὐτοῦ εἰς τὸ α' βιβλίον τῶν στοιχείων, λέγει περὶ αὐτοῦ: «γέγονε δὲ οὗτος ὁ ἀνὴρ ἐπὶ τοῦ πρώτου Πτολεμαίου».

[1] Ὑπομνήματα τοῦ Ἀρχιμήδους.

Ἐκ τῆς μαρτυρίας ταύτης δυνάμεθα ἴσως νὰ παραδεχθῶμεν ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἔζη περὶ τὸ 300ον πρὸ Χριστοῦ ἔτος ἐν Ἀλεξανδρείᾳ, ἔνθα τότε ἦτο τὸ κέντρον τῶν ἑλληνικῶν γραμμάτων· περὶ τοῦ χαρακτῆρος αὐτοῦ μαρτυρεῖ ὁ Πάππος ὅτι ἦτο ἀεπιεικέστατος καὶ πρὸς ἅπαντας εὐμενὴς τοὺς καὶ κατὰ ποσὸν συναύξειν δυναμένους τὰ μαθήματα. Ἐὰν εἰς ταῦτα προσθέσωμεν καὶ τὴν ἀπάντησιν, ἣν ἔδωκεν, ὡς λέγουσιν εἰς τὸν Πτολεμαῖον, ζητοῦντα νὰ διδαχθῇ τὴν γεωμετρίαν εὐκολώτερον ἢ οἱ λοιποὶ «ὅτι δὲν ὑπάρχει βασιλικὴ ὁδὸς πρὸς τὴν γεωμετρίαν», ἔχομεν πᾶν ὅ,τι περὶ τοῦ βίου τοῦ Εὐκλείδου εἶνε γνωστόν. Ἀλλὰ τὰ σπουδαιότατα τῶν συγγραμμάτων αὐτοῦ διεσώθησαν μέχρις ἡμῶν καὶ μαρτυροῦσι περὶ τῆς ἐξόχου διανοίας τοῦ ἀνδρός. Ἐξ αὐτῶν ἄρχεται νέα ἐποχὴ τῆς μαθηματικῆς, ἡ τῆς ἀκμῆς, ἐν ᾗ ἀποκτήσασα μόνιμον βάσιν, ἀναπτύσσεται εἰς τὸ ἑξῆς ἀφ' ἑαυτῆς, ἄνευ φιλοσοφικῶν ἢ ἄλλων ἐξωτερικῶν ἐπιδράσεων. Ἡ ὡριμότης αὐτῆς εἶχε προπαρασκευασθῆ διὰ τῶν ἐφευρέσεων τοῦ Πλάτωνος καὶ τῶν μαθητῶν αὐτοῦ· ἀλλ' ἔπρεπε νὰ ἔλθῃ ὁ Εὐκλείδης, ἵνα δώσῃ εἰς τὴν μαθηματικήν, ἰδίως δὲ εἰς τὴν γεωμετρίαν, ὅ,τι ἔδωκεν εἰς τὴν λογικὴν ὁ Ἀριστοτέλης· τουτέστι, μόνιμον μορφήν, φέρουσαν διὰ παντὸς τὸν τύπον τῆς ἑλληνικῆς μεγαλοφυΐας· τοῦτο ἐγένετο διὰ τῆς ἐκδόσεως τῶν στοιχείων του, ἐν οἷς περιέχονται, μετ' ἀμιμήτου ἀκριβείας ἐκτεθειμένα, ὅσα περίπου καὶ σήμερον ἐν τοῖς βιβλίοις τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας περιλαμβάνουσι. Πάντα τὰ προηγουμένως γραφέντα βιβλία γεωμετρίας, τοσοῦτον ἐπεσκιάσθησαν ὑπὸ τούτου, ὥστε ἢ οὐδόλως ἢ ἐλάχιστα αὐτῶν ἴχνη διεσώθησαν ἡμῖν. Ἐπὶ πολλοὺς δὲ αἰῶνας τὰ στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου ἦσαν τὸ μόνον ἐν χρήσει διδακτικὸν βιβλίον τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας· ἀλλὰ καὶ σήμερον ἔτι ὁ Εὐκλείδης πρόκειται ὡς ὑπόδειγμα ἐπιστημονικῆς ἀκριβείας, σχεδὸν ἀνέφικτον. Οἱ ἀρχαῖοι ὠνόμαζον αὐτὸν *στοιχειωτήν*.

Ἐν τοῖς Στοιχείοις περιλαμβάνει ὁ Εὐκλείδης οὐ μόνον τὰ στοιχεῖα τῆς γεωμετρίας, ἀλλὰ καὶ τῆς ἀριθμητικῆς. Ἐκ τῶν 13 βιβλίων, ἐξ ὧν σύγκεινται, τὸ 7ον, 8ον καὶ 9ον περιέχουσι μόνον ἀριθμητικὰς θεωρίας· ἰδίως τὰ περὶ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου, περὶ τῶν πρώτων ἀριθμῶν, τὴν ἀνάλυσιν εἰς παράγοντας, ἐν ἑνὶ λόγῳ, πάσας σχεδὸν τὰς ἐν τῇ στοιχειώδει ἐκπαιδεύσει καὶ σήμερον ἔτι διδασκομένας ἰδιότητας τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Μὴ ἐπιτρέποντος τοῦ χρόνου τὴν λεπτομερῆ ἀνάλυσιν τῶν Στοιχείων, παρατηρῶ μόνον ὅτι τὰ ἀξιολογώτατα μέρη εἶνε τὸ 5ον καὶ τὸ 12ον βιβλίον. Ἐν τῷ 5ῳ ἐκτίθενται τὰ περὶ τῶν ἀναλογιῶν καὶ τῶν ἀναλόγων μεγεθῶν μετὰ τοσαύτης τέχνης, μεθ' ἧς οὐδὲ σήμερον ἐν τοῖς πλείστοις τῶν μαθηματικῶν συγγραμμάτων. Ὁ ὁρισμός, ὅντινα δίδει, τῶν ἀναλόγων μεγεθῶν εἶνε κατὰ τοῦτο ἀξιοθαύμαστος, ὅτι ὑπάγονται ὑπ' αὐτὸν ἀδιακρίτως πάντα τὰ μεγέθη, σύμμετρα καὶ ἀσύμμετρα. Ἐὰν δέ τις ἱκανῶς ἐξετάσῃ τὰ περὶ τῶν ἀναλογιῶν, πείθεται ὅτι ἡ Εὐκλείδειος μέθοδος καὶ ἀκριβεστάτη εἶνε καὶ ἡ μόνη πρὸς τὴν φύσιν τῶν πραγμάτων σύμφωνος.

Ἐν τῷ 12ῳ βιβλίῳ, ὅπερ, πιθανώτατα, εἶνε ἔργον αὐτοῦ τοῦ Εὐκλείδου, ἐκτίθενται μετ' ἀμιμήτου δεινότητος τὰ περὶ τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν, καὶ τῶν διαφόρων αὐτῶν σχέσεων. Ἐν αὐτῷ λύονται γεωμετρικῶς προβλήματα, ἅτινα, λυόμενα διὰ τῆς ἀλγέβρας, ἄγουσιν εἰς ἐξισώσεις πολυπλόκους καὶ μέχρι τοῦ 4ου βαθμοῦ.

Πλὴν τῶν Στοιχείων, ὁ Εὐκλείδης ἔγραψε καὶ ἄλλα σπουδαῖα μαθηματικὰ συγγράμματα. τοιαῦτα εἶνε τὰ *δεδομένα*, ὅπερ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συνέχεια τῶν στοιχείων καὶ εἰσαγωγὴ εἰς τὴν ἀνωτέραν γεωμετρίαν· πλὴν τούτων ἀναφέρει ὁ Πάππος καὶ 4 βιβλία αὐτοῦ ἐπὶ τῶν κωνικῶν τομῶν, δύο ἐπὶ τῶν στερεῶν τόπων καὶ τὰ πορίσματα.

Νεώτερος τοῦ Εὐκλείδου ἦτο ὁ μέγιστος τῶν Ἑλλήνων μαθηματικῶν, ὁ Συρακούσιος Ἀρχιμήδης· οὗτος ἔζησεν ἀπὸ τοῦ 287—212 πρὸ Χριστοῦ· ἐσπούδασε δὲ ἐν τῇ σχολῇ τῆς Ἀλεξανδρείας. Ὁ ἀνὴρ οὗτος ἔταμε νέας ὁδούς, ἐφεῦρε νέας μεθόδους, καὶ ἐξέτεινε τὸ κράτος τῆς μαθηματικῆς περισσότερον παντὸς ἄλλου· διότι ἔθεσε τὰς βάσεις τῆς θεωρητικῆς μηχανικῆς καὶ τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ ὑπολογισμοῦ.

Ἀφ' ὅτου ἡ ἰδέα τοῦ Ἀντιφῶντος, περὶ τοῦ τετραγωνισμοῦ καμπυλογράμμων χωρίων, ἐπολεμήθη ὑπὸ τῶν σοφιστῶν, εἶχεν ἐγκαταλειφθῆ ἐντελῶς. Ὁ Ἀρχιμήδης κατώρθωσε νὰ ἀνυψώσῃ αὐτὴν εἰς μέθοδον τετραγωνισμοῦ, κατὰ τῆς ὁποίας οὐδεμία ἀντίρρησις εἶνε δυνατή. Ἡ διὰ τῆς μεθόδου ταύτης εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ παραβολικοῦ χωρίου, εἶνε ἀξία προσοχῆς· διότι ὁ Ἀρχιμήδης, ἀνακαλύψας τὸν νόμον, ὃν ἀκολουθοῦσι, προβαίνοντα τὰ ἐγγεγραμμένα τρίγωνα, εἰς τὸ παραβολικὸν χωρίον, καὶ γνωρίζων τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἐξ αὐτῶν, οὐδόλως ἐκ τούτων συμπεραίνεται ἀμέσως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου, οὐδὲ λέγει περὶ ἀπείρων τὸ πλῆθος ἐγγεγραμμένων ἢ περὶ προσεγγίσεως ἢ ἄλλου τινὸς ἀσαφοῦς καὶ μὴ ἐντελῶς ὡρισμένου, ἀλλ' ἐπιφέρει τὴν διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς ἀπόδειξιν, τοῦ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν δὲν εἶνε οὔτε μικρότερον, οὔτε μεγαλήτερον ἐκείνου, ὃ λέγει. Δι' ὁμοίας μεθόδου ἀποδεικνύει ἐν τῷ βιβλίῳ, ὅπερ ἐπιγράφει, κύκλου μέτρησιν, ὅτι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν $3\ ^{1}]_{7}$ καὶ $3\ ^{10}]_{71}$. Ἀλλ' ἐκτὸς τῆς μεθόδου ταύτης, ὁ Ἀρχιμήδης ἐφεῦρε καὶ ἄλλην μέθοδον, δι' ἧς μετρεῖ τὰς ἐπιφανείας ἢ καὶ τοὺς ὄγκους· ἡ μέθοδος αὕτη συνίσταται εἰς τὸ νὰ συγκρίνῃ, τὸ μέγεθος, ὅπερ πρόκειται νὰ μετρηθῇ, πρὸς τὸ ἄθροισμα μερῶν, ὧν τὸ μὲν πλῆθος αὐξάνει ὑπὲρ πάντα ἀριθμόν, ἕκαστον δὲ τῶν μερῶν τούτων μεταβάλλεται καὶ καταντᾷ παντὸς τοῦ προτεθέντος μεγέθους ἔλασσον. Διὰ τῆς μεθόδου ταύτης εὗρε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕλικος, περὶ ἧς ἔγραψε δύο βιβλία, ἐκθέτων τὰ ἰδιώματα καὶ τὴν γένεσιν αὐτῆς· ὁμοίως καὶ τὴν σχέσιν, ἣν ἔχει τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὸ τοῦ κύκλου· διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου εὗρε καὶ τὸν ὄγκον τῶν ἐκ περιστροφῆς ἐλλειψοειδῶν, ὑπερβολοειδῶν, καὶ παραβολοειδῶν. Ἡ μέθοδος αὕτη κατ' οὐσίαν δὲν διαφέρει τῆς σήμερον ἐν χρήσει ἐν τῷ ὁλοκληρωτικῷ ὑπολογισμῷ· ὁ ἀναγινώσκων τὸν τετραγωνισμὸν τῆς ἕλικος ἢ τὸν κυβισμὸν τῶν ῥηθέντων σωμάτων, καὶ γράφων διὰ τῶν σημερινῶν σημείων, ὅσα ὁ Ἀρχιμήδης διὰ λέξεων λέγει, ἀναγινώσκει πράγματι μέρος τοῦ σημερινοῦ ὁλοκληρωτικοῦ ὑπολογισμοῦ· μετὰ τῆς διαφορᾶς ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης οὐδὲ λέξιν λέγει περὶ ὁρίων ἢ περὶ ἀπειροστῶν καὶ τῶν τοιούτων, δι' ὧν οἱ λογισμοὶ γίνονται σήμερον συντομώτεροι, ἀλλ' οὐχὶ καὶ σαφέστεροι. Ὁ Ἀρχιμήδης μένει πάντοτε ἐν τῷ πεπερασμένῳ καὶ ἐντελῶς ὡρισμένῳ· καὶ ἀφοῦ ἐκ τῆς μεθόδου του διίδῃ τὸ ἐξαγόμενον, ἀποδεικνύει ἔπειτα τὴν ἀλήθειαν αὐτοῦ διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Ὁ Ἀρχιμήδης ἔγραψε καὶ δύο βιβλία περὶ τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κυλίνδρου. Ἐν αὐτοῖς ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα, ὅτι ἡ ὅλη ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἰσοῦται τῇ ἐπιφανείᾳ τεττάρων μεγίστων κύκλων αὐτῆς. Εὑρίσκει τὸ ἐμβαδὸν οἱουδήποτε σφαιρικοῦ τμήματος, τὴν μεταξὺ σφαίρας καὶ τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου ὑπάρχουσαν σχέσιν καὶ ἄλλα τῆς αὐτῆς φύσεως, ἤτοι μετρητικὰ θεωρήματα.

Ἡ μεγαλοφυΐα τοῦ Ἀρχιμήδους δὲν περιωρίσθη εἰς τὴν τελειοποίησιν τῶν τότε γνωστῶν μεθόδων ἢ εἰς τὴν λύσιν δυσκόλων προβλημάτων, ἀλλ' ἔπλασε καὶ νέας ἐπιστήμας· ἐν τοῖς δύο βιβλίοις αὐτοῦ περὶ τῶν ἐπιπλεόντων περιέχεται ἡ ὑδροστατική, βαπτιζομένη ἐπὶ τῆς περιφήμου ἀρχῆς, τῆς ὁποίας ἡ ἀνακάλυψις τοσαύτην, ὡς λέγεται, προὐξένησεν αὐτῷ χαράν, ὥστε ἔτρεχεν εἰς τὰς ὁδοὺς τῶν Συρακουσῶν βοῶν «*εὕρηκα εὕρηκα*»· ἐν δὲ τοῖς δύο βιβλίοις *περὶ ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν*, εὑρίσκεται τὸ θεμέλιον τῆς θεωρητικῆς μηχανικῆς· διότι ἐν αὐτοῖς περιέχεται ἡ θεωρία τῆς ἰσορροπίας τοῦ μοχλοῦ, οὗ τὴν δύναμιν ἐκφράζων ὁ Ἀρχιμήδης λέγεται ὅτι εἶπε πρὸς τὸν βασιλέα Ἱέρωνα «δός μοι πᾶ στῶ, καὶ τὰν γᾶν κινήσω»· πρὸς δὲ τούτοις καὶ ἡ σημαντικωτάτη διὰ τὴν μηχανικὴν ἔννοια τοῦ κέντρου τοῦ βάρους, καὶ ὁ προσδιορισμὸς τοῦ κέντρου τοῦ βάρους τῶν ἁπλουστέρων ἐπιπέδων σχημάτων.

Τοιοῦτος ἦτο ὁ ἀνήρ, ὃν ὁ ἀρχαῖος κόσμος σύμπας ἐθαύμασε, καὶ τοῦ ὁποίου τὰ ἔργα, πρὸ τῆς εὑρέσεως τοῦ διαφορικοῦ ὑπολογισμοῦ, ἤτοι ἐπὶ 18 αἰῶνας, ἐθεωροῦντο καὶ ἦσαν, τὸ ἄκρον ἄωτον τῆς μαθηματικῆς· μόνος ἐφάμιλλος αὐτοῦ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὁ Νεύτων, διότι καὶ τούτου ἡ μεγαλοφυΐα ηὔξησε τὴν ἐπιστήμην διὰ νέων θεμελιωδῶν ἐννοιῶν καὶ νέων γενικωτάτων μεθόδων, ὧν ἡ ἀνάπτυξις καὶ ἡ λεπτομερὴς σπουδὴ ἔφερε τὴν μαθηματικὴν εἰς ὃ σημεῖον εὑρίσκεται σήμερον.

Ἀποθανόντος τοῦ Ἀρχιμήδους κατὰ τὴν ὑπὸ τῶν Ῥωμαίων ἅλωσιν τῆς πατρίδος του, νέος ἐφάνη λαμπρὸς ἀστὴρ ἐν τῷ μαθηματικῷ τῆς Ἑλλάδος ὁρίζοντι, Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος. Οὗτος ἐμαθήτευσε παρὰ τοῖς μαθηταῖς τοῦ Εὐκλείδου ἐν Ἀλεξανδρείᾳ, καὶ ὑπῆρξε διὰ τὴν ἀνωτέραν γεωμετρίαν, ἰδίως δὲ τὰς κωνικὰς τομάς, ὅ,τι ὁ Εὐκλείδης διὰ τὰ στοιχεῖα. Ἀπὸ τῆς εὑρέσεως αὐτῶν ὑπὸ τοῦ Μεναίχμου, αἱ κωνικαὶ τομαὶ ἀπησχόλησαν, ἕνεκα τῶν περιέργων αὐτῶν ἰδιωμάτων, πάντας τοὺς Ἕλληνας γεωμέτρας· πολλὰ δὲ περὶ αὐτῶν εἶχον γραφῆ συγγράμματα, ὧν ἀξιολογώτερα ἦσαν τοῦ Ἀρισταίου 5 βιβλία καὶ τοῦ Εὐκλείδου 4. Πάντες ὅμως, ἀκολουθοῦντες τὴν πρώτην τοῦ Μεναίχμου ἰδέαν, ἐθεώρουν μόνον ὀρθὸν κῶνον μετὰ κυκλικῆς βάσεως, καὶ ἔτεμνον αὐτὸν δι' ἐπιπέδων καθέτων ἐπὶ μίαν τῶν γενετειρῶν· διὰ τοῦτο καὶ ὠνόμαζον, τὴν μὲν ἔλλειψιν ὀξυγωνίου κώνου τομήν, τὴν δὲ ὑπερβολὴν ἀμβλυγωνίου. Ὁ Ἀπολλώνιος ἐγκύψας βαθύτερον εἰς τὴν θεωρίαν ταύτην εὗρεν ὅτι, ὁ αὐτὸς κῶνος εἴτε ὀρθὸς εἴτε πλάγιος ὑποτεθῇ, δίδει καὶ τὰς τρεῖς καμπύλας, κατὰ τὴν διάφορον θέσιν τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου, ἐὰν μόνον ἡ βάσις αὐτοῦ εἶνε κυκλική. Ἐντεῦθεν ὁρμώμενος, ἐκθέτει ἐν τοῖς κωνικοῖς αὐτοῦ μετὰ θαυμαστῆς δεινότητος πάσας τῶν κωνικῶν τομῶν τὰς ἰδιότητας, ἐξ ὧν καὶ δίδει τὰ ὀνόματα τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς ὑπερβολῆς, ἅτινα καὶ σήμερον ἔχουσι. Ἐκ τῶν 8 βιβλίων, ἐξ ὧν ἀποτελοῦνται τὰ κωνικὰ τοῦ Ἀπολλωνίου, μόνον τὰ 7 πρῶτα σῴζονται· περιέχουσι δέ, τὰ μὲν 3 πρῶτα τὰ ἰδιώματα τῶν διαμέτρων καὶ τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῶν ἑστιῶν, ἅτινα δύνανται νὰ ὑποτεθῶσι γνωστὰ καὶ ὑπὸ τῶν πρὸ τοῦ Ἀπολλωνίου γραψάντων, ὧν ὅμως τὰ συγγράμματα κατέστησαν ἀφανῆ ὑπὸ τῶν κωνικῶν τοῦ Ἀπολλωνίου, τὰ δὲ ἑπόμενα περιέχουσι τὰς ἰδίας τοῦ Ἀπολλωνίου ἐφευρέσεις, ὡς αὐτὸς λέγει· καὶ τὸ μὲν τέταρτον ἐξετάζει κατὰ πόσα σημεῖα τέμνουσιν ἀλλήλας ἢ ἐφάπτονται δύο κωνικαί, τὸ δὲ πέμπτον περιέχει προβλήματα μεγίστου καὶ ἐλαχίστου ἐπὶ τῶν κωνικῶν τομῶν, τὸ 6ον ἐξετάζει τὰ περὶ ὁμοιότητος καὶ ἀνομοιότητος αὐτῶν, καὶ τὸ 7ον διάφορα θεωρήματα καὶ ἰδίως ἐπὶ τῶν συζυγῶν διαμέτρων.

Ὁ Πάππος ἀναφέρει καὶ ἄλλα ἔργα τοῦ Ἀπολλωνίου, ἀλλὰ τὰ κωνικὰ αὐτοῦ εἶναι βεβαίως τὸ σπουδαιότατον· διότι ἐν αὐτοῖς ἐξήντλησε σχεδὸν πᾶσαν τὴν θεωρίαν τῶν κωνικῶν τομῶν τοσαύτην ἐπιδείξας δύναμιν πνεύματος καὶ εὐφυΐαν γεωμετρικήν, ὥστε δικαίως ἐπωνομάσθη ὑπὸ τῶν συγχρόνων του «ὁ μέγας γεωμέτρης».

Πλὴν τῶν τριῶν τούτων διασημοτάτων μαθηματικῶν, τοῦ Εὐκλείδου, λέγω, τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ τοῦ Ἀπολλωνίου, ἡ σχολὴ τῆς Ἀλεξανδρείας ἀνέδειξε καὶ ἄλλους ἐξόχους γεωμέτρας καὶ ἀστρονόμους· τοιοῦτοι εἶνε ὁ Ἀρίσταρχος ὁ Σάμιος, διάσημος ἀστρονόμος, περὶ οὗ ὁ Ἀρχιμήδης μαρτυρεῖ, ὅτι παρεδέχετο τὴν περὶ τὸν Ἥλιον κίνησιν τῆς γῆς καὶ ἔγραψε μάλιστα ἴδιον σύστημα, ἐν ᾧ ἔθετε τὸν ἥλιον εἰς τὸ κέντρον τοῦ κόσμου. ὁ Κόνων ὁ Σάμιος, περὶ τῆς γεωμετρικῆς ἱκανότητος τοῦ ὁποίου ἔχει ὁ Ἀρχιμήδης μεγάλην ἰδέαν· πλὴν τούτων ὁ Ἐρατοσθένης, ἔξοχος ἀστρονόμος καὶ μαθηματικός· καὶ ἄλλοι ἐν τοῖς συγγράμμασι τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ Ἀπολλωνίου μνημονευόμενοι.

Μετὰ τὸν Ἀπολλώνιον ἄρχεται στασιμότης τις διαρκέσασα καθ' ὅλον τὸν πρὸ Χριστοῦ χρόνον. Ἐν οὕτῳ ἔζησαν οἱ ἀξιόλογοι μαθηματικοί, Γεμῖνος, Ἥρων, Φίλων, Ποσειδώνιος, Σωσιγένης καὶ Θεοδόσιος, καὶ ὁ ἀστρονόμος Ἵππαρχος· μετὰ δὲ ταῦτα ἄρχεται βραδεῖα μὲν ἀλλὰ βεβαία ἡ παρακμὴ τῆς ἑλληνικῆς μαθηματικῆς· ἐφαρμογαί τινες αὐτῆς, μάλιστα δὲ ἡ ἀστρονομία καὶ ἡ μηχανικὴ προώδευσαν εἰσέτι ἐπί τινα χρόνον· ὁ κράτιστος τῶν Ἑλλήνων ἀστρονόμων, Πτολεμαῖος, ἔζησεν κατὰ τὸν 2ον αἰῶνα μετὰ Χριστόν· ἐκ δὲ τῶν γεωμετρῶν, ἄξιοι μνείας εἶνε, ὁ Περσεύς, ὅστις ἔγραψεν περὶ τῶν τομῶν τῆς σπείρας, ὁ Μενέλαος, ὅστις ἔγραψε περὶ τῶν χορδῶν τοῦ κύκλου, ἤτοι εἶδος τριγωνομετρίας, καὶ ὁ Πάπος, 400 μ. Χ. οὗτινος ἡ συναγωγή, καὶ ὡς ἱστορικὴ πηγὴ εἶνε πολύτιμος καὶ ὡς μαθηματικὸν σύγγραμμα πολλὰ ἄξια λόγου περιέχει· ἰδίως αναφέρω τὸ θεώρημα αὐτοῦ ἐπὶ τῶν ἀμφοισμάτων, ὅπερ ἐν τοῖς βιβλίοις τῆς μηχανικῆς ἐσφαλμένως φέρεται ὑπὸ τὸ ὄνομα τοῦ Guldin· καὶ τὸ θεμελιῶδες θεώρημα τῶν ἀναρμονικῶν λόγων, ὅπερ ἐν τῇ νεωτέρᾳ συνθετικῇ γεωμετρίᾳ ἔχει μεγίστην σπουδαιότητα.

Αἰτία τῆς παρακμῆς τῶν μαθηματικῶν ἦτο βεβαίως ἡ γενικὴ τοῦ ἔθνους κατάπτωσις καὶ παρακμή, συνέτεινε δ' ἴσως πρὸς τοῦτο καὶ ἡ νέα θρησκεία, ἥτις ἔδωκεν εἰς τὰ πνεύματα νέαν διεύθυνσιν ἐρευνῶν· ἀλλ' ἐκτὸς τούτων, δέον νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ γεωμετρία ἦτο ἀδύνατον νὰ προαχθῇ περισσότερον διὰ τῶν ἰδίων αὐτῆς μέσων καὶ ἄνευ τῆς γενικῆς ἀριθμητικῆς. Αἱ γεωμετρικαὶ μέθοδοι εἶνε ἀνεπίδεκτοι τῆς μεγάλης γενικότητος, τὴν ὁποίαν οἱ ἀριθμοὶ παρέχουσιν. Ἀλλ' ἡ μαθηματικὴ τῶν Ἑλλήνων εἶχεν ὅλως γεωμετρικὸν χαρακτῆρα, καὶ αὐταὶ αἱ ἀριθμητικαὶ προτάσεις ὡς λ. χ. τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ὁσωνδήποτε ἐφεξῆς ἀριθμῶν, ἔχουσι παρὰ τῷ Εὐκλείδῃ καὶ τῷ Ἀρχιμήδει γεωμετρικὴν μορφήν. Εἰς τὴν διάνοιαν τῶν Ἑλλήνων μαθητικῶν τὰ γεωμετρικὰ μεγέθη ἀπετέλουν εἶδος ποσοῦ γενικώτερον τῶν ἀριθμῶν· διότι ἐθεώρουν ἀριθμοὺς μόνον τοὺς ἀκεραίους καὶ τὰ κλάσματα· ὥστε πᾶς ἀριθμὸς παρίστατο ὑπὸ μεγέθους οὐχὶ δὲ καὶ τἀνάπαλιν. Ἡ πρὸς τὴν γεωμετρίαν ὑπερβάλλουσα αὕτη ῥοπὴ τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος δύναται νὰ ἐξηγηθῇ εἴτε ἐκ τῆς ζωηρᾶς αὐτῶν φαντασίας, ἥτις ἔδιδεν εἰς τὰ πάντα σχῆμα καὶ ζωήν, εἴτε καὶ ἐκ τούτου, ὅτι ἡ γεωμετρία εἶνε πλησιεστέρα εἰς τὴν φύσιν καὶ τὸν ἐξωτερικὸν κόσμον, εἶνε ἡ πρώτη ἀφαίρεσις, ἐνῷ ἡ γενικὴ ἀριθμητική, ἡ ἡ ἄλγεβρα, εἶνε τρόπον τινὰ ἀφαίρεσις ἀνωτέρας τάξεως. Διὰ ταῦτα, ἡ μὲν γεωμετρία προήχθη θαυμασίως, ἡ δὲ ἀριθμητικὴ ὑπήγετο εἰς τὴν γεωμετρίαν, καὶ εὑρίσκετο εἰσέτι σχετικῶς εἰς τὴν νηπιότητα αὐτῆς. Ἡ πρόοδος τῆς μαθηματικῆς ἀνέστρεψε τὴν σχέσιν ταύτην. Ἐν τῇ νεωτέρᾳ μαθηματικῇ ἡ ἄλγεβρα ὑπερέχει πολὺ τῆς γεωμετρίας κατὰ τὴν γενικότητα. Ἡ τροπὴ αὕτη, ἢ ἡ νέα φάσις τῆς μαθηματικῆς, ἄρχεται ἀπὸ τοῦ Διοφάντου· οὗτος ἔζη πιθανῶς περὶ τὰ μέσα τοῦ 4ου μ. Χ. αἰῶνος καὶ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πατὴρ τῆς ἀλγέβρας· ἐν τοῖς σωζομένοις 6 βιβλίοις τῶν ἀριθμητικῶν αὐτοῦ εὑρίσκονται κατὰ πρῶτον, ἡ διὰ συμβόλων παράστασις τῶν ἀριθμῶν καὶ αἱ ἀλγεβρικαὶ πράξεις πρὸς τούτοις ἡ ἔννοια τῆς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως καὶ μέγα πλῆθος προβλημάτων πρώτου καὶ δευτέρου βαθμοῦ μετὰ τῆς λύσεως αὐτῶν. Τὸ ἔργον τοῦ Διοφάντου δὲν ἔχει μὲν τὴν τελειότητα, ἥτις χαρακτηρίζει τὰ ἔργα τοῦ Εὐκλείδου, τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ τοῦ Ἀπολλωνίου, εἶνε ὅμως σπουδαιότατον διὰ τὴν νέαν διεύθυνσιν, ἣν ἔδωκεν εἰς τὴν μαθηματικήν.

Μετὰ τὴν μόρφωσιν τῆς ἀλγέβρας ὑπὸ τοῦ Διοφάντου ὑπελείπετο εἰσέτι, ἵνα καταστῇ δυνατὴ ἡ εἰς τὴν γεωμετρίαν ἐφαρμογὴ αὐτῆς, οὐδὲν ἄλλο ἢ ἡ εἰσαγωγὴ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν· διότι τότε ἡ ἁπλῆ μετάφρασις τῶν γεωμετρικῶν σχέσεων τῶν σχημάτων εἰς τὴν ἀλγεβρικὴν γλῶσσαν, θὰ ἔφερεν εἰς τὴν σημερινὴν ἀναλυτικὴν γεωμετρίαν· διότι αἱ μέθοδοι αὐτῆς ἦσαν ἤδη γνωσταί· ἀρκεῖ νὰ ἀναφέρω ὅτι ὁ Μέναιχμος ἤδη ἐγνώριζε τὴν ἐξίσωσιν τῶν κωνικῶν τομῶν πρὸς μίαν διάμετρον καὶ τὴν ἐφαπτομένην κατὰ τὸ πέρας αὐτῆς· τουτέστι τὴν μεταξὺ τεταγμένης καὶ τετμημένης ὑπάρχουσαν σχέσιν. Ὡσαύτως καὶ τὴν ἐξίσωσιν τῆς ὑπερβολῆς πρὸς τὰς ἀσυμπτώτους αὐτῆς. Ἀλλ' ἡ ἀπὸ τῶν συμμέτρων ἀριθμῶν εἰς τοὺς ἀσυμμέτρους μετάβασις ἐφαίνετο τοῖς Ἕλλησιν ἀδύνατος, ὡς ἀπαιτοῦσα τὴν εἰσαγωγὴν τῆς ἐννοίας τοῦ ἀπείρου εἰς τὴν μαθηματικήν· διότι ἄνευ αὐτοῦ εἶνε ἀδύνατον νὰ πληρωθῇ τὸ μεταξὺ συμμέτρων καὶ ἀσυμμέτρων ὑπάρχον χάσμα· διὰ τοῦτο, καίτοι διορῶντες τὴν ἐξ αὐτῶν ὠφέλειαν, δὲν ἀπετόλμησαν τὴν γενίκευσιν ταύτην τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ. Τοῦτο ἐγένετο μόλις κατὰ τὸν 16ον αἰῶνα, ἐξ οὗ καὶ ἄρχεται ἡ νεωτέρα μαθηματική.

Καὶ τοσαῦτα μὲν ἱκανὰ πρὸς ἐκτίμησιν τῆς Ἑλληνικῆς ἐπιστήμης. Ἀλλ' ἐν τῇ σημερινῇ καταστάσει τῆς μαθηματικῆς ἡ ἄλγεβρα τοῦ Διοφάντου, ἀναπτυχθεῖσα καὶ λαβοῦσα πᾶσαν αὐτῆς τὴν γενικότητα, κατέστη ἡ ψυχή, οὕτως εἰπεῖν, τῆς μαθηματικῆς, τὸ ἀπαραίτητον ὄργανον πάσης μαθηματικῆς ἐρεύνης· αὕτη μόνη παρέχει τὰς πρὸς τὴν σπουδὴν τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων ἀναγκαίας γενικὰς μεθόδους, καὶ ἐκ τῶν θεωρημάτων αὐτῆς συντίθενται ἅπασαι αἱ μαθηματικαὶ θεωρίαι, ὡς ἀπὸ τῶν λέξεων ὁ λόγος. Ἀλλὰ ποῖαι εἶνε αἱ ἀρχαί, ἐφ' ὧν στηρίζεται ἡ ἄλγεβρα πῶς ἀπὸ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ὁρμωμένη, ἀνυψοῦται βαθμηδὸν εἰς τοὺς κλασματικούς, εἰς τοὺς ἀρνητικούς, εἰς τοὺς ἀσυμμέτρους καὶ εἰς τοὺς φανταστικούς; τίς ὁ ἐσωτερικὸς τῶν ἀριθμῶν τούτων σύνδεσμος; καὶ τίς ἡ πρὸς τὴν εὕρεσιν αὐτῶν ὁδηγοῦσα θεμελιώδης ἰδέα; ταῦτα πάντα, ἀπαραίτητα ὄντα διὰ τὴν σπουδὴν τῆς ἀνωτέρας μαθηματικῆς θὰ εἶνε τὸ θέμα τῶν ἑπομένων μαθημάτων.

ΟΙ ΣΥΓΧΡΟΝΟΙ ΠΟΙΗΤΑΙ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ*

ΙΟΝΙΟΣ ΣΧΟΛΗ

Α'

Ἡ κυριαρχία τῆς Ἐνετίας, ἡ γειτνίασις πρὸς τὴν Ἰταλίαν, οἱ δεσμοὶ τῆς πολιτικῆς ἐξαρτήσεως, αἱ διὰ τοῦ ἐμπορίου συχναὶ πρὸς τὴν χερσόνησον σχέσεις ἐξήσκησαν ἐπὶ τῶν ἠθῶν, ἐθίμων καὶ τῆς γλώσσης τῶν Ἰονίων νήσων σπουδαίαν ἐπιρροήν.

Εἰς τὰς πόλεις, πρὸ πάντων εἰς τὴν πρωτεύουσαν Κέρκυραν, ἐδέσποσαν τὰ ἔθιμα, αἱ τέχναι καὶ τὰ γράμματα τῆς Ἰταλίας, καὶ ἡ Ἑλλὰς ἡ τὴν πρωτοβουλίαν ἄλλοτε ἔχουσα, ἐδέησε νὰ λάβῃ παρὰ τῶν Ἰταλῶν τὴν τοῦ καλοῦ αἴσθησιν, ἣν ἄλλοτε ἐδίδαξεν αὐτούς. Οἱ εὐγενεῖς τῶν Ἰονίων νήσων ἐθεώρουν ὡς ὑψίστην τιμὴν τὸ νὰ εἶναι ἐγγεγραμμένοι ἐν τῇ χρυσῇ βίβλῳ τῆς Ἐνετίας, ὅλοι δὲ οἱ πλούσιοι καὶ φιλόδοξοι νέοι ἐξεπαιδεύοντο ἐν Ἰταλίᾳ, καὶ τὰ περικλεῆ Πανεπιστήμια τῆς Παδούης καὶ Βολονίας ἔβριθον Ἑλλήνων σπουδαστῶν. Οἱ πλεῖστοι αὐτῶν ἐστέναζον ἐπὶ τῇ δουλείᾳ τῆς πατρίδος καὶ κατηρῶντο τὴν Μουσουλμανικὴν τυραννίαν τὴν καταστρέφουσαν μὲν τὴν χώραν, ἄγονα δὲ καθιστῶσαν τὰ πνεύματα, ἐνῷ τὴν Ἐνετικὴν κυριαρχίαν, ἐθεώρουν ὡς δεινὸν μικρότερον, δεικνύοντες οὕτω δικαιοσύνην ἀσυνήθη εἰς δεδουλωμένους λαούς.

Ἡ δικαιοσύνη, εἰς πᾶσαν περίπτωσιν συνεπάγεται τὴν ἀμοιβήν· οὕτω κατὰ τοὺς τέσσαρας αἰῶνας τῆς ὀθωμανικῆς δεσποτείας αἱ ἑλληνικαὶ χῶραι, αἱ παραγαγοῦσαι τοὺς πλείστους ποιητὰς καὶ συγγραφεῖς εἶναι ἡ Κρήτη καὶ αἱ Ἰόνιοι νῆσοι, αἵτινες διεσώθησαν διὰ τῆς Ἐνετίας ἀπὸ τῆς μουσουλμανικῆς βαρβαρότητος.

Τὸ πρᾶγμα ἀποβαίνει ἔτι καταφανέστερον ἐν Κρήτῃ ἐν ᾗ ἡ Ἑλληνικὴ ποίησις ἤκμαζε μέχρι τῆς κατακτήσεως αὐτῆς ὑπὸ τῶν Τούρκων κατὰ τὸν δέκατον ἕβδομον αἰῶνα, ἐξακολουθεῖ δὲ ἔτι καὶ νῦν ἡ ποίησις ἐκείνη ἐκπροσωποῦσα τὴν δημώδη ποίησιν. Ὁ Ἐρωτόκριτος ἀναγινώσκεται μέχρι

* Ἴδε τόμ. Η', σελ. 667.