

ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΗ

ΛΟΓΟΣ ΕΝΑΡΚΤΗΡΙΟΣ *

Ἀναλαμβάνων σήμερον τὴν ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ διδασκαλίαν μου, θεωρῶ καθήκόν μου νὰ ἐκφράσω δημοσίᾳ τὴν εὐγνωμοσύνην μου πρὸς τοὺς κυρίους καθηγητάς τῆς φιλοσοφικῆς σχολῆς, οἵτινες ἐπανεילהμμένως καὶ ὁμοφώνως με προέτειναν καθηγητὴν, καὶ πρὸς τὴν Σ. Κυβέρνησιν καὶ τὴν Αὐτοῦ μεγαλειότητα τὸν Βασιλέα ἡμῶν, διότι ηὐδόκησαν, ἀποδεχόμενοι τὴν γνώμην τῆς σχολῆς νὰ με διορίσωσιν εἰς τὴν θέσιν ταύτην. Συναισθαινόμενος δὲ τὸν ὑψηλὸν προορισμὸν τοῦ πανελληνίου τούτου καθιδρύματος, θέλω διαρκῶς προσπαθῆ, ὥπως μὴ φανῶ ἀνέξιος τῆς θέσεως, ἣν ἔλαβον.

Ἐπόμενος τοῖς εἰθισμένοις ἔκρινα, κύριοι, ἀρμόδιον ἐν τῇ σημερινῇ μου ὁμιλίᾳ νὰ διαλάβω ἐν ὀλίγοις περὶ τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης ἐν γένει καὶ ἰδίως περὶ τοῦ μέρους αὐτῆς, ὅπερ προτίθεμαι νὰ διδάξω, τουτέστι περὶ τοῦ διαφορικοῦ καὶ τοῦ ολοκληρωτικοῦ λογισμοῦ.

Ἡ μαθηματικὴ ἐπιστήμη ὀρίζεται ὡς ἐπιστήμη τοῦ ποσοῦ· διότι περὶ τὰ ποσὰ καὶ τὰς σχέσεις καὶ τὰς μεταβολὰς αὐτῶν ἀσχολεῖται. Βάσεις αὐτῆς εἰναι ὀλίγαί τινες ἀρχαὶ ἐκ τῆς πείρας τοῦ ἐκτὸς ἡμῶν κόσμου λαμβανόμεναι καὶ ἐκ τῶν ὁποίων ὁρμωμένη ἡ ἀνθρωπίνη διάνοια καὶ βαθμηδὸν προχωροῦσα, δημιουργεῖ μέγα καὶ ἁρμονικὸν οἰκοδόμημα. Αἱ ἀρχαὶ δ' αὗται εἶναι ἡ στοιχειώδεις ἐννοιαί, ἐξ ὧν αἱ ἄλλαι συντίθενται, οἷαι αἱ ἐννοιαί τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ χώρου, τῆς ἐπιφανείας καὶ τῶν τοιούτων, ἡ θεμελιώδεις κρίσεις, τουτέστιν ἀξιώματα, ἐφ' ὧν στηρίζονται αἱ ἄλλαι κρίσεις.

Σκοπὸς τῆς μαθηματικῆς εἶνε ἡ λύσις παντὸς ζητήματος, ἐνθα ζητεῖται τὸ πότον. Ἵνα δὲ εὐκολώτερον κατορθώσῃ τοῦτο, ἀπλουστεύουσα τὸ ἔργον αὐτῆς, παραβλέπει πᾶσαν ἄλλην τῶν ὄντων ἔποψιν καὶ θεωρεῖ αὐτὰ μόνον ὡς πρὸς τὸ ποσόν· καὶ ἐκάστη δὲ τῶν ἄλλων ἐπιστημῶν ἐξετάζει τὰ ὄντα ὑπὸ ἰδίαν ἔποψιν· διότι ἡ τελεία γνῶσις τοῦ κόσμου κατὰ τὰς πολλὰς καὶ ποικίλας ὁψεις αὐτοῦ εἶνε δι' ἕκαστον ἀνθρώπον ἀκατόρθωτος. Καθὼς δὲ αἱ φωτειναὶ ἀκτῖνες, ἵνα θερμάνωσί τι καὶ κάυσωσιν, εἶνε ἀνάγκη νὰ συγκεντρωθῶσιν ὅσον τὸ δυνατόν περισσώτερον εἰς μικρὰν ἔκτασιν, οὕτω καὶ ἡ διάνοια, ἵνα εὕρῃ τι, ἵνα κατορθώσῃ νὰ εἰσδύσῃ εἰς τὰς ἐσωτερικὰς τῶν πραγμάτων σχέσεις καὶ ἀνακαλύψῃ τὰς αἰτίας τῶν διαφόρων φαινομένων καὶ τοὺς νόμους, καθ' οὓς ταῦτα συμβαίνουσιν, εἶνε ἀνάγκη νὰ περιορισθῇ εἰς μικρὸν μέρος τοῦ ὅλου κόσμου, εἰς μίαν μόνην αὐτοῦ ἄψιν. Ὅτι διὰ τοῦ τρόπου τούτου μονομερεῖς μόνον

* Ἐκφωνηθεὶς τῇ 7 Δεκεμβρίου 1884 ἐν τῷ Ἑθνικῷ Πανεπιστημίῳ.

γνώσεις αποκτώνται, εἶνε πρόδηλον· ἀλλ' ὁ περιορισμὸς οὗτος εἶνε ἀπαραιτητῶς ἀναγκαστὸς διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῶν ἐπιστημῶν καὶ τὴν πρόοδον τῆς ἀνθρωπότητος.

Αὐτοτελὴς καὶ αὐτότερκης οὕτα ἡ μαθηματικὴ ἐπιστήμη οὐδὲν παρ' οὐδεμιᾶς ἄλλης ἐπιστήμης λαμβάνει τὸν ἀντίον ἀλλὰ λαμβάνουσι παρ' αὐτῆς μάλιστα δὲ αἱ φυσικαὶ ἐπιστήμαι· διότι ἡ ὥς πρὸς τὸ ποσὸν ἔρευνα τῶν ὄντων καὶ τῶν κατὰ ποσὸν σχέσεων αὐτῶν, ἥτις εἶνε ἔργον τῆς μαθηματικῆς, ἔχει ἐν ταῖς φυσικαῖς μάλιστα ἐπιστήμαις τὸ μέγιστον μέρος καὶ ἀποτελεῖ τὴν οὐσίαν καὶ τὸν πυρῆνα πάσης ἐρεῦνης. Διὰ τοῦτο αἱ μαθηματικαὶ γνώσεις εἶνε ἀπαραίτητον ἐφόδιον παντός, ὅστις θέλει νὰ σπουδάζῃ τὰς φυσικὰς ἐπιστήμης καὶ τοὺς ποικίλους κλάδους καὶ τὰς ἐφαρμογὰς αὐτῶν. Διὰ τῆς βοηθείας τῶν μαθηματικῶν εὐρίσκεται ὁ λόγος τῶν φυσικῶν φαινομένων καὶ ἐξηγεῖται πῶς εἶνε ταῦτα ἀναπόδραστοι συνέπειαι τῶν φυσικῶν ἀρχῶν καὶ εὐρίσκονται οἱ νόμοι, εἰς τοὺς ὁποίους τὰ φαινόμενα ὑπόκεινται· διὰ τοῦτο εἰς ὅσα μέρη τῶν ἐπιστημῶν τούτων εἰσεχώρησαν ἡ μαθηματικὴ, ἔφερε τάξιν, ἁρμονίαν καὶ βεβαιότητα. Ἐὰν μάλιστα ἀναλογισθῶμεν ὅτι κατὰ τὴν σημερινὴν τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν κατάστασιν ἡ πιθανωτάτη καὶ πρὸς τὰ πράγματα σύμφωνος ὑπόθεσις εἶνε ὅτι πᾶν φαινόμενον οὐδὲν ἄλλο εἶνε ἢ κινήσεως προϊόν, λόγου χάριν, τὸ φῶς προέρχεται ἐκ κινήσεως ἢ εἶνε ἀποτέλεσμα κινήσεως, ὁ ἤχος, τὸ θερμαντικόν, ὁ ἡλεκτρισμός, καὶ αὐτὴ ἡ ἑλξίς ἴσως εἶνε κινήσεως ἀποτέλεσμα, ἐπομένως πάντα ἀνάγονται εἰς τὴν μηχανικὴν καὶ ἐξηγοῦνται διὰ τῶν νόμων αὐτῆς, ἐὰν ἐνθυμηθῶμεν ὅτι καὶ τὰ ἄτομα τῆς ὕλης καὶ αὐτὰ εὐρίσκονται ἐν ἀπαύτῳ κινήσει, ὥστε ἡ φυσικὴ περιλαμβάνεται ἐν τῇ μηχανικῇ, ἐὰν λέγω ταῦτα ἀναλογισθῶμεν. ἐννοοῦμεν πόσον μεγάλη εἶνε ἡ ἐπίδρασις τῆς μαθηματικῆς ἐπὶ τὰς φυσικὰς ἐπιστήμης. Ὁ θέλων σήμερον νὰ σπουδάζῃ τὰς φυσικὰς ἐπιστήμης, μάλιστα δὲ τὴν ἰδίως λεγομένην φυσικὴν καὶ τὴν χημείαν ἄνευ μαθηματικῶν, οὐδὲν ὡς διαφέρει τοῦ θέλοντος νὰ σπουδάζῃ γλωσσᾶν τινα ἄνευ τῆς γραμματικῆς αὐτῆς.

Καὶ πρὸς τὴν φιλοσοφίαν εἶνε ἡ μαθηματικὴ ἡ ἀρίστη προπαιδεία· διότι ἐν αὐτῇ καὶ μόνῃ παρατηρεῖται ἡ τελεῖα ἁρμονία τῶν μερῶν πρὸς ἄλληλα καὶ ἡ τάξις αὐτῶν· αὐτῆς καὶ μόνης αἱ ἀλήθειαι ἔχουσι τελείαν ἀκρίβειαν, καὶ διὰ τοῦτο εἶνε τὰ ἀπλούστεστα παραδείγματα, εἰς τὰ ὁποῖα οἱ λογικοὶ κανόνες ἐφαρμόζονται. Κατὰ τὸν Πλάτωνα, ἡ μαθηματικὴ, ὡς κειμένη μετὰ τοῦ ὅλως ἰδανικοῦ καὶ τῆς ὅλως ἐστερημένης ἰδεῶν ὕλης, ἀπασχολεῖ τὸ πνεῦμα ἀπὸ τῶν ὕλικῶν καὶ καθιστᾷ αὐτὸ ἱκανώτερον νὰ ἐννοήσῃ τὸ ἰδανικόν. Γνωστὸν δὲ εἶνε τὸ λόγιον, ὅπερ ἐπέγραψεν, ὡς λέγουσιν, ἐπὶ τῆς Ἀκαδημείας «μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσὶτω μου τὴν στέγην».

Ἀλλ' ἡ σπουδὴ τῶν μαθηματικῶν μάλιστα δὲ τῶν στοιχειωδῶν ἔχει

καὶ ἄλλην γενικωτέραν σηµαίνει καὶ σπουδαιότητα ὡς μορφωτικὸν μέσον· διότι ἀνυπτύσσει καὶ κρατύνει τὴν διάνοιαν καὶ ὀξύνει τὴν κρίσιν καὶ κατὰ τὴν πεπρατήρησιν τοῦ Πλάτωνος αἱ μὲν φύσει πρὸς τὰ μαθηματικὰ ῥέποντες γίνονται δι' αὐτῶν ὀξεῖς εἰς πάντα τὰ μαθήματα, οἱ δὲ βραδεῖς πάλιν γίνονται ὀξύτεροι ἑαυτῶν.

Μετὰ τὸν γενικὸν τοῦτον χαρακτηρισμὸν τῆς μαθηματικῆς ἔρχομαι ἤδη εἰς τὴν σύντομον περιγραφὴν τοῦ διαφορικοῦ καὶ τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ καὶ τῆς σηµατικῆς καὶ δυνάμεως αὐτῶν.

Ὁ διαφορικὸς λογισμὸς εἶνε θεωρία τις περὶ τὰς αὐξήσεις καὶ τὰς μειώσεις τῶν μεταβάλλομένων ποσῶν. Ἄν καὶ κατὰ πολλοὺς καὶ ποικίλους τρόπους δύνανται νὰ μεταβάλλωνται τὰ ποσά, ἀκολουθοῦσιν ἐν τούτοις αἱ αὐξήσεις καὶ αἱ μειώσεις αὐτῶν, ὅταν εἶνε λίαν μικρά, νόμους τινὰς ἀπλοῦς· περὶ τούτους δὲ τοὺς νόμους καὶ περὶ τὰς ἐφαρμογὰς αὐτῶν ἀσχολεῖται ὁ διαφορικὸς λογισμὸς. Μετ' αὐτοῦ συνδέεται ἀμέσως καὶ ἀναποσπάζτως ὁ ὁλοκληρωτικὸς λογισμὸς, ὅστις ἐκ τῶν νόμων, οὓς ἀκολουθοῦσιν αἱ μικρὰ αὐξήσεις καὶ αἱ μειώσεις τῶν μεταβάλλομένων ποσῶν, ζητεῖ νὰ εὑρῇ τὸν τρόπον καθ' ὃν ἐξαρτῶνται ταῦτα ἀπ' ἀλλήλων. Οἱ δύο δὲ οὗτοι λογισμοὶ συμπληροῦντες ἀλλήλους συναποτελοῦσι κυρίως ἐν ὅλῳ, οὐσιωδῶς διάφορον τῶν ἄλλων μερῶν τῆς μαθηματικῆς καὶ τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται κατ' ἐξοχὴν ἀνάλυσις. Ἐν τῇ ἀλγέβρᾳ καὶ ἐν τῇ γεωμετρίᾳ τὰ ποσά, ὅσα εἰς ἕκαστον ζήτημα ἐμφανίζονται, ἅπαντα ἄνευ διακρίσεως μεγέθους λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν· διότι ὁ ἀλγεβρικὸς λογισμὸς εἶνε ἀνεξάρτητος τοῦ μεγέθους τῶν ἀριθμῶν, ἐφ' ὧν ἐφαρμόζεται· ἐάν δέ ποτε παραλειφθῇ τι ὡς μικρὸν σχετικῶς πρὸς ἄλλα, τὸ ἐξαγόμενον, εἰς ὃ φθάνομεν, θεωρεῖται ὡς ἀληθὲς μόνον κατὰ προσέγγισιν. Ἀλλ' ἐν τῇ ἀναλύσει ἀρχεται ἡ συστηματικὴ διάκρισις τῶν ποσῶν εἰς τάξεις κατὰ μέγεθος· τοῦτο δὲ εἶνε τὸ διακρίνον καὶ χαρακτηρίζον τὴν ἀνάλυσιν. Τὰ μεταβάλλόμενα καὶ πρὸς τὴν ἐκμηδένισιν πείνοντα ποσά, ἢ ὡς συνήθως λέγομεν, τὰ ἀπειροστά, (ὡς τοιαῦτα δὲ νοοῦνται συνήθως αἱ αὐξήσεις καὶ αἱ μειώσεις τῶν ποσῶν) διακρίνονται εἰς τάξεις καὶ συγκρίνονται πρὸς ἀλλήλα· ἐκ δὲ τῆς συγκρίσεως ταύτης γίνεται φανερόν ὅτι δὲν ἔχουσι πάντα ἴσην ἀξίαν καὶ δύνανται εἰς τὴν λύσιν πλείστων ζητημάτων, καὶ ὅτι τινὰ ἐξ αὐτῶν δύνανται νὰ παραλειφθῶσιν ἐντελῶς ἐν τῷ λογισμῷ, χωρὶς διόλου νὰ βλαφθῇ ἡ μαθηματικὴ ἀκρίβεια. Οὕτω διακρίνεται ποῖα κυρίως ποσά εἰς ἕκαστον ζήτημα πρέπει νὰ λαμβάνωνται ὑπ' ὄψιν καὶ ποῖα νὰ παραλείπωνται ὡς περιττά· ἡ δὲ ἀπλούστευσις αὕτη γίνεται αἰτία τῆς ταχυτέρας λύσεως τοῦ ζητήματος καὶ τῆς ἀναγωγῆς πολλῶν καὶ διαφόρων θεωριῶν εἰς μίαν μόνην γενικὴν· εἰς τοῦτο δὲ ἔγκειται ἡ πρόοδος τῆς ἐπιστήμης.

Αἱ ἐφαρμογαὶ τοῦ διαφορικοῦ καὶ τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ εἰς τὴν

γεωμετρίας εἶνε σπουδαιόταται· διότι μέγα πλῆθος γεωμετρικῶν θεωριῶν ἀναπτύσσεται εὐκολώτατα δι' αὐτῶν· λόγου χάριν, ἡ θεωρία τῶν ἐφαπτομένων, ἡ τῶν ἐνελιγμένων καὶ ἐξειλιγμένων, ἡ τῶν περιβαλλουσῶν, ἡ τῶν ἐγγυτάτων γραμμῶν ἢ ἐπιφανειῶν, ἡ τῶν πρωτευουσῶν γραμμῶν ἐπὶ οἷαςδήποτε ἐπιφανείας κτλ. εἰς δὲ τὸν ὁλοκληρωτικὸν λογισμὸν ἀνάγεται ἡ εὕρεσις τοῦ μήκους τῶν καμπύλων γραμμῶν καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ πάσης ἐπιφανείας καὶ τοῦ ὅγκου παντὸς στερεοῦ, ἐν γένει ἡ καταμέτρησις πάσης ἐκτάσεως.

Ἀλλὰ καὶ πᾶν ζήτημα τῆς θεωρητικῆς μηχανικῆς ἀνάγεται εἰς ζήτημα τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ. Ἐὰν ὦντι ἡ θεωρητικὴ μηχανικὴ βασίζεται ἐπὶ φυσικῶν τινῶν ἀρχῶν, αἵτινες ἀφορῶσιν εἰς τὰς γενικὰς τῶν σωμάτων ιδιότητας καὶ ἰδίως εἰς τὸν τρόπον καθ' ὃν ἐπιδρῶσιν ἐπ' ἄλληλα τὰ μέρη τῆς ὕλης. Αἱ ἀρχαὶ δὲ αὗται, δι' ὧν ζητοῦμεν νὰ ἐξηγήσωμεν τὰ διάφορα φαινόμενα, ἀναφέρονται συνήθως εἰς τὰ ἐλάχιστα ἢ ἀπειροστικά μέρη τῆς ὕλης καὶ εἰς τὰ ἀπειροστικά μέρη τοῦ χρόνου· ἡ ἐφαρμογὴ ἄρα αὐτῶν εἰς οἷονδήποτε μηχανικὸν ζήτημα δίδει ἐξισώσεις περιεχούσας ἀπειροστά, ἢ ὡς συνήθως λέγομεν, διαφορικά ἐξισώσεα· ἡ δὲ ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων εὕρεσις τῶν νόμων τοῦ φαινομένου διὰ πεπερασμένα σώματα καὶ διὰ πεπερασμένον χρονικὸν διάστημα γίνεται διὰ τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ· καὶ ἂν ἡδυνάμεθα νὰ λύωμεν πᾶσαν διαφορικὴν ἐξίσωσιν, θὰ ἡδυνάμεθα νὰ λύωμεν καὶ πᾶν μηχανικὸν ζήτημα· ὥστε ἀνευ ὑπερβολῆς δύναται τις νὰ εἴπῃ ὅτι ἡ θεωρητικὴ μηχανικὴ ἀπασα ἀνάγεται εἰς τὸν ὁλοκληρωτικὸν λογισμὸν· τὸ αὐτὸ δὲ ἰσχύει καὶ περὶ τῆς φυσικῆς, ἥτις ὁσήμεραι κατακτᾷ νὰ ὑπαχθῇ εἰς τὴν μηχανικὴν. Εὐλόγως λοιπὸν δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ὁ διαφορικὸς καὶ ὁ ὁλοκληρωτικὸς λογισμὸς εἶνε τὸ σημαντικώτατον καὶ μεγκλοφυέστατον πάντων, ὅσα ἡ ἀνθρωπίνη διάνοια εὗρεν ἐν τῇ μαθηματικῇ ἐπιστήμῃ μέχρι τοῦδε.

Ἀρχικὴ ἰδέα τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ εἶνε ἡ ἰδέα ἀθροίσματος, τοῦ ὁποίου ἕκαστος ὅρος ἐλαττοῦται καὶ τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ἐν ᾧ τὸ πλῆθος αὐτῶν αὐξάνει εἰς ἀπειρον. Πρῶτος ὅστις ἐφήρμοσε τὴν ἰδέαν ταύτην εἰς τὴν καταμέτρησιν γεωμετρικῶν μεγεθῶν, ἐμβαδῶν καὶ ὀγκῶν, εἶνε ὁ μέγιστος τῶν Ἑλλήνων μαθηματικῶν ὁ Συρακούσιος Ἀρχιμήδης· ὅστις ἔζη ἀπὸ τοῦ 287 μέχρι τοῦ 212 πρὸ Χριστοῦ. Περὶ τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ περὶ τῶν ἐφευρέσεων αὐτοῦ ἐν τῇ γεωμετρικῇ καὶ τῇ μηχανικῇ καὶ φυσικῇ διέλαβον ἄλλοτε, ὅτε ἀπὸ τῆς ἑδρας ταύτης ἐξέθηκα τὴν ἱστορίαν τῆς μαθηματικῆς ἐν τῇ ἀρχαίᾳ Ἑλλάδι· διὰ τοῦτο ἀρκοῦμαι ἐν τῷ παρόντι εἰς ὀλίγα, καὶ πρῶτον ἀναφέρω τὰ παραδείγματα τῶν ὁλοκληρώσεων τὰς ὁποίας ἐξετέλεσεν. Ἴνα εὖρη τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἀπ' αὐτοῦ ὀνομαζομένης ἑλικος, ὁ Ἀρχιμήδης διακρεῖ αὐτὸ διὰ τῶν πολικῶν ἀκτίνων εἰς μέρη, ἅτινα ἐξομοιοῖ πρὸς κυκλικοὺς τομεῖς, τῶν ὁποίων εὖ-

ρίσκει τὸ ἄθροισμα. Ἦνεν δὲ εὖρη τὸν ὄγκον τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, καὶ τοῦ παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, τέμνει τὰ στερεὰ ταῦτα διὰ σειρᾶς ἐπιπέδων παραλλήλων καὶ ἐξομοιοῖ τὰ μεταξὺ τμήματα πρὸς κυλίνδρους. Ἦνεν αὐτὴν μέθοδον μεταχειρίζομεθα καὶ σήμερον πρὸς εὗρεσιν τοῦ ὄγκου τῶν σωμάτων τούτων. Ὁ ἀναγινώσκων τὸν τετραγωνισμόν τῆς ἑλικος ἢ τὸν κυβισμόν τῶν σφαιροειδῶν καὶ τῶν ἰωνοειδῶν τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ γράφων διὰ τῶν σημερινῶν σημείων ὅσα ὁ Ἀρχιμήδης διὰ λέξεων λέγει, ἀναγινώσκει πράγματι μέρος τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ· μετὰ τῆς διαφορᾶς ὅτι ὁ Ἀρχιμήδης οὐδὲ λέξιν λέγει περὶ ὀρίων ἢ ἀπειροστῶν καὶ τῶν τοιούτων, δι' ὧν οἱ λογισμοὶ γίνονται σήμερον συντομώτεροι, ἀλλ' οὐχὶ καὶ σαφέστεροι. Ὁ Ἀρχιμήδης μένει πάντοτε ἐν τῷ πεπερασμένῳ καὶ ἐντελῶς ὀρισμένῳ· ἀφοῦ δὲ διὰ τῆς μεθόδου ταυ δίδῃ τὸ ἐξαγόμενον, ἀποδεικνύει ἔπειτα τὴν ἀλήθειαν αὐτοῦ διὰ τῆς εἰς ἄστοπον ἀπκωγῆς.

Καθόλου ὁ Ἀρχιμήδης ἔταμε νέας ὁδοὺς ἐν τῇ μαθηματικῇ, καὶ ἐξέτεινε τὸ κράτος αὐτῆς περιστότερον παντὸς ἄλλου· διότι ἔθετε τὰς βάσεις τῆς θεωρητικῆς μηχανικῆς καὶ τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ· τὰ ἔργα αὐτοῦ ἐθεωροῦντο καὶ ἦσαν ἐπὶ 18 αἰῶνας, ἤτοι μέχρι τῆς εὐρέσεως τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ ὑπὸ τοῦ Νεύτωνος, τὸ ἄκρον ἄωτον τῆς μαθηματικῆς. Μόνος ἐφάμιλλος αὐτοῦ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὁ Νεύτων· διότι καὶ τούτου ἡ μεγαλοφυΐα ἠύξησε τὴν ἐπιστήμην διὰ νέων θεμελιωδῶν ἐννοιῶν καὶ νέων γενικωτάτων μεθόδων, τῶν ὁποίων ἡ ἀνάπτυξις καὶ ἡ λεπτομερὴς σπουδὴ ἔφερε τὴν μαθηματικὴν, εἰς ὃ σημεῖον εὐρίσκεται σήμερον.

Τὸ διάστημα ἀπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους μέχρι τοῦ Νεύτωνος, τουτέστιν ἀπὸ τοῦ 212 πρὸ Χριστοῦ μέχρι τοῦ 1642, ἀναγκάζομεθα νὰ διατρέξωμεν συντομώτατα· πρέπει ὁμῶς νὰ ἐπιθεωρήσωμεν τὴν ἐν αὐτῷ πρόοδον τῆς μαθηματικῆς, ἵνα ἐννοήσωμεν τὴν σημασίαν τῆς ἀνακαλύψεως τοῦ Νεύτωνος.

Οἱ μέγιστοι τῶν ἐλλήνων μαθηματικῶν, ὁ Εὐκλείδης, ὁ Ἀρχιμήδης καὶ ὁ Ἀπόλλώνιος, οἵτινες ἔζησαν ἀπὸ τοῦ 300οῦ μέχρι τοῦ 100οῦ ἔτους πρὸ Χριστοῦ, προήγαγον τὴν καθαρὰν γεωμετρίαν εἰς τοιοῦτον βαθὸν τελειότητος, ὥστε ἐπὶ μικροῦς αἰῶνας ἐθεωροῦντο τὰ ἔργα αὐτῶν ὡς τὸ ἄκρον ἄωτον τῆς γεωμετρίας. Ἀδύνατον ἦτο πλέον νὰ προχωρήσῃ ἡ γεωμετρία κατὰ τὴν διεύθυνσιν ἣν εἶχε λάβει, διὰ τῶν ἰδίων αὐτῆς μέσων καὶ ἄνευ τῆς βοηθείας τῶν ἀριθμῶν· διότι αἱ γεωμετρικαὶ μέθοδοι δὲν εἶνε ἐπιθεωρητικαὶ τῆς μεγάλης γενικότητος καὶ τῆς συντομίας ἣν ἔχουσιν αἱ ἀριθμητικαί· ἔπρεπε λοιπὸν νὰ ἀνοιχθῇ νέα ὁδός, ἔπρεπε νὰ καλλιεργηθῇ καὶ νὰ ἀναπτυχθῇ ἡ ἀριθμητικὴ, καὶ νὰ ἀνυψωθῇ εἰς γενικὴν ἀριθμητικὴν ἦτοι ἄλγεβραν. Ἡ τροπὴ αὕτη ἡ νέα φάσις τῆς μαθηματικῆς

ἀρχεται ἀπὸ τοῦ Διοφάντου, ὅστις ἔζη πιθανῶς περὶ τὰ μέσα τοῦ 4ου μετὰ Χριστὸν αἰῶνος, καὶ δύνανται νὰ θεωρηθῇ ὡς πατὴρ τῆς ἀλγέβρας· διήρκεσε δὲ ἡ ἀλγεβρική αὕτη, οὕτως εἰπεῖν, ἐποχὴ τῆς μαθηματικῆς μέχρι τοῦ 16ου αἰῶνος περίπου. Κατὰ τὸ διάστημα τοῦτο ἀνεπτύχθη μικρὸν κατὰ μικρὸν ἡ ἀλγεβρα καλλιεργηθεῖσα κατ' ἀρχάς μὲν ὑπὸ τῶν Ἰνδῶν καὶ τῶν Ἀράβων, ἔπειτα δὲ ὑπὸ τῶν Εὐρωπαίων.

Ἀξιοσημείωτοι ἀνακαλύψεις ἐν τῇ ἀριθμητικῇ καὶ ἐν τῇ ἀλγέβρᾳ κατὰ τὴν μακρὰν ταύτην περίοδον εἶνε αἱ ἑξῆς.

1) Ἡ εἰσαγωγὴ τῶν Ἰνδικῶν χαρακτήρων ἢ ψηφίων πρὸς γραφὴν τῶν ἀριθμῶν, ἣτις κατέστησε πολὺ ἐυκολωτέρας τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις καὶ συνέτεινεν εἰς τὴν ταχυτέραν ἀνάπτυξιν τῆς ἀλγέβρας· τὰ ψηφία ταῦτα καὶ τὴν χρῆσιν αὐτῶν ἔλαβον οἱ Ἀράβες παρὰ τῶν Ἰνδῶν κατὰ τὸν 8ον αἰῶνα· διὰ δὲ τῶν Ἀράβων διεδόθησαν εἰς τὴν Εὐρώπην.

2) Ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων τοῦ τρίτου καὶ τοῦ τετάρτου βαθμοῦ ὑπὸ τῶν Ἰταλῶν Tartaglia Ferrari περὶ τὰ μέσα τοῦ 16ου αἰῶνος (1545).

3) Ἡ εἰσαγωγὴ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν εἰς τὸν λογισμόν περὶ τὸ τέλος τοῦ 16ου αἰῶνος.

Καὶ τέλος ἡ εὑρεσις τῶν λογαρίθμων ὑπὸ τοῦ Νεπέρου κατὰ τὸ 1614.

Διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν εἰς τὸν ἀλγεβρικὸν λογισμόν ἤρθη καὶ τὸ τελευταῖον ἐμπόδιον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀλγέβρας εἰς τὴν γεωμετρίαν· αἱ μεταξὺ τῶν σχημάτων σχέσεις ἦσαν ἤδη ἀπὸ τῶν Ἑλλήνων γνωσταί· ἀρκεῖ νὰ ἀναφέρω ὅτι ὁ μαθητὴς τοῦ Πλάτωνος, ὁ Μέναιχμος ὅστις εὑρε τὰς τομὰς τοῦ κώνου, ἐγνώριζε τὴν ἐξίσωσιν αὐτῶν πρὸς μίαν διάμετρον καὶ τὴν ἐφαπτομένην κατὰ τὸ πέρας αὐτῆς ἦτοι τὴν μεταξὺ τεταγμένης καὶ τετμημένης ὑπάρχουσας σχέσιν· ὥστε οὐδὲν ἄλλο σχεδὸν ὑπελείπετο ἢ ἀπλῆ μετάρρασις τῶν σχέσεων τούτων εἰς τὴν ἀλγεβρικὴν γλῶσσαν, ἵνα προκύψῃ εἰς φῶς ἡ ἀναλυτικὴ γεωμετρία· τοῦτο δὲ ἐγένετο ὑπὸ τοῦ φιλοσόφου καὶ μαθηματικοῦ Καρτεσίου, τῷ 1637.

Ἀπὸ τοῦ Καρτεσίου ἀρχετὶ διὰ τὴν γεωμετρίαν νέαι ἐποχὴ προόδου· πολλὰ νέα καμπύλαι ἐπενοήθησαν, ἐν αἷς ἡ κυκλοειδής, αἱ ἐπικυκλοειδεῖς, ἡ λογαριθμικὴ ἑλιξ καὶ ἄλλαι. Αἱ ιδιότητες αὐτῶν ἐξητάθησαν διὰ τῆς ἀλγέβρας, πολλὰ δὲ προβλήματα ἀνώτερα ἐπὶ τῶν καμπύλων τούτων ἐλύθησαν.

Εἰς τὴν εὑρεσιν τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ ἔδωκεν ἀφορμὴν γεωμετρικὰ προβλήματα μάλιστα δὲ τὰ ἑξῆς δύο, ἡ εὑρεσις τῆς ἐφαπτομένης τῶν καμπύλων, καὶ ἡ εὑρεσις τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων τεταγμένων αὐτῶν. Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες γεωμέτραι ἐφικντάζοντο τὰς ἐφαπτομένας ὡς ἐγγιζούσας τὴν καμπύλην εἰς ἓν μόνον σημεῖον, οὐχὶ δὲ ὡς ὅρια τῶν θέσεων τῆς τεμνούσης ὅταν δύο σημεῖα τομῆς συμπέσωσιν εἰς ἓν. Ὁ Καρτέσιος θεωρεῖ τὰς ἐφαπτομένας ὡς ὅρια τεμνουσῶν εὐρίσκει δὲ τὰς ἐφα-

πτομένως διαφόρων καμπύλων καὶ ἰδίως τῶν κυλισιγενῶν. Πρὸς εὕρεσιν τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων τεταγμένων τῶν ἀλγεβρικῶν καμπύλων, τῶν ὁποίων αἱ ἐξισώσεις εἶνε ἀπηλλοτριμέναι ῥιζικῶν, ἔδωκεν ὁ γάλλος Fermat μέθοδον τινε, ἥτις οὐδὲν ὅπως σχεδὸν διαφέρει τῆς σήμερον ἐν χρήσει καὶ ἐν τῇ ὁποίᾳ καθαρῶς διαφρίνεται ἡ διάκρισις τῶν ποσῶν εἰς τάξεις· διότι προκλείπει τὰς ἀνωτέρας δυνάμεις τῶν αὐξήσεων τῶν συντεταγμένων. Ὁμοίαν ἔδωκε λύσιν καὶ τοῦ προβλήματος τῶν ἐφαπτομένων, ἀλλ' ὡς ἀνωτέρω εἶπον, μόνον διὰ τὰς ἀλγεβρικὰς καμπύλας, ὧν αἱ ἐξισώσεις εἶνε ἀπηλλοτριμέναι ῥιζικῶν.

Μετ' αὐτὸν ὁ ἄγγλος Barrow προσήγγισε περισσότερον εἰς τὴν μέθοδον τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ· διότι εὕρισκε τὴν ὑπάρχουσαν σχέσιν μεταξὺ τῶν πρώτων δυνάμεων τῶν αὐξήσεων ἀλλὰ καὶ πάλιν διὰ συναρτήσεις ἀλγεβρικὰς.

Τοιαύτη ἦτον ἡ κατὰστάσις τῆς μαθηματικῆς κατὰ τὸ 1642, ὅτε ἐγεννήθη ὁ Νεύτων. Νεώτατος ὁ Νεύτων ἐπεδόθη εἰς τὴν σπουδὴν τῶν μαθηματικῶν, ἐνθα καὶ ἀνεδείχθη τάχιστα ἡ ὑπέρτατος αὐτοῦ διάνοια. Ἐν ἡλικίᾳ 24 ἐτῶν, ὡς ἐξάγεται ἐκ τῶν ἐπιστολῶν του, τουτέστι τῷ 1666, ἦτο ἤδη κάτοχος τῆς μεθόδου τῆς διαφορίσεως, ἥ ὡς ἀποκαλεῖ αὐτήν, τῶν fluxione, καὶ εἶχεν ἐφαρμόσει αὐτήν εἰς τὴν λύσιν πολλῶν καὶ δυσκόλων προβλημάτων. Ὁ συμπολίτης αὐτοῦ Barrow σχετισθεὶς μετ' αὐτοῦ τοσοῦτον ἐθαύμαζε τὴν μεγαλοφυΐαν τοῦ Νεύτωνος, ὥστε παρεχώρησεν αὐτῷ τὴν θέσιν του ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ τῆς Κανταβριγίας, ἐνθα ὁ Νεύτων μέχρι τοῦ 1696 ἐδίδασκε τὰ μαθηματικά. Ἐν τῇ θέσει ταύτῃ διαιτελῶν ἐξέδωκε μεταξὺ ἄλλων καὶ τὸ ἄριστον τῶν συγγραμμάτων του πρὸς μαθηματικὰς ἀρχὰς τῆς φιλοσοφίας τῆς φύσεως. Κατὰ τὸ 1696 διορίσθη εἰς ἄλλην τιμητικὴν θέσιν ἐνθα καὶ ἔμεινε μέχρι τοῦ θανάτου του· ἀπέθανε δὲ τὸ 1727, ζήτης ὀγδοήκοντα καὶ τέσσαρα ἔτη.

Αἱ πεμπληθεῖς ἀνακαλύψεις τοῦ δαιμονίου τούτου ἀνδρὸς εἰς πάντας τοὺς κλάδους τῆς μαθησεως, εἰς τὴν φυσικὴν, τὴν μηχανικὴν καὶ τὴν ἀστρονομίαν, μάλιστα δὲ ἡ ἀνακάλυψις τῆς παγκοσμίου ἑλξεως, ἀρκοῦσι βεβαίως ἵνα καταστήσωσι τὸ ὄνομα αὐτοῦ ἀθάνατον· ἀλλὰ καὶ ἡ εὕρεσις τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ δὲν πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὡς ὀλιγώτερον σπουδαίον· ἂν καὶ στερεῖται τῆς ἐξωτερικῆς λάμψεως, ἣν ἔχουσιν αἱ μηχανικαί, ἀστρονομικαὶ καὶ φυσικαὶ ἀνακαλύψεις, εἶνε ὅμως ἡ κλεῖς πηρὸν τούτων, εἶνε τὸ ὄργανον δι' οὗ ἐκαῖναι ἐγένοντο.

Εἰς τὴν ἐκθεσιν τῆς μεθόδου του ὁ Νεύτων ἀναχωρεῖ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τῶν καμπύλων· ὡς πρὸς τὴν γένεσιν τῶν καμπύλων φαντάζεται ὅτι ἐκάστη καμπύλη γράφεται ὑπὸ σημείου ὅπερ κινεῖται ἐπὶ τῆς τεταγμένης ἐν ᾧ αὕτη κινεῖται παραλλήλως ἑαυτῇ καὶ καθέτως πρὸς τὴν τεταγμένην· καὶ τὴν μὲν κίνησιν τῆς τε-

ταγμένης φαντάζεται ὁμαλήν, τὴν δὲ κίνησιν τοῦ σημείου ἐπὶ τῆς τεταγμένης θεωρεῖ ὡς ἐπιταχυνομένην ἢ ἐπιβραδυνομένην· διότι ἂν ἦτο καὶ αὐτὴ ὁμαλή, τὸ σημεῖον ὃ ἐγράφεν εὐθεῖαν γραμμήν· τότε εἰς ἐκάστην θέσιν τὸ σημεῖον, ὅπερ γράφει τὴν καμπύλην, ὃ ἐχρ. ταχύτητα τινὰ ὁρισμένην, καὶ κατὰ τοὺς νόμους τῆς μηχανικῆς. ἂν ἡ ἐπιταχύνουσα ἢ ἡ ἐπιβραδύνουσα τὴν κίνησιν αἰτίκᾳ ἔπαυσεν εἰς τινὰ θέσιν, τὸ σημεῖον ἦθελεν ἐξακολουθήσει κινούμενον κατὰ τὴν ἐφαπτομένην τῆς καμπύλης μετὰ ταχύτητα ὅσην ἔχει εἰς τὴν θέσιν ταύτην· τὴν ταχύτητα ταύτην, ἥτις φέρεται κατὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἀναλύει ὁ Νεύτων εἰς τὰς δύο συνιστώσας αὐτῆς, κατὰ τοὺς δύο ἄξονας τῶν συντεταγμένων, καὶ τὰς συνιστώσας ταύτας καλεῖ, τὴν μὲν πρώτην ῥοήν (fluxion) τῆς τεταγμένης, τὴν δὲ δευτέραν, ἥτοι τὴν ταχύτητα τοῦ σημείου ἐπὶ τῆς τεταγμένης κινουμένου, ῥοήν τῆς τεταγμένης. Ὁ λόγος τῶν δύο ταύτων ῥοῶν εἶνε ἡ πηράγωγος τῆς συναρτήσεως καὶ ἐξ αὐτοῦ ὁρίζεται ἀμέσως ἡ διεύθυνσις τῆς ἐφαπτομένης. Ἀπὸ τῆς ἀρχῆς ταύτης ἀναχωρῶν ὁ Νεύτων, εὕρισκει εὐκόλως τὰ διαφορικά, ἢ ὡς ἀποκαλεῖ αὐτά, τὰς ῥοὰς, τῶν διαφορῶν ἀπλῶν συναρτήσεων, ἔτι δὲ τὸ διαφορικὸν τοῦ ἀθροίσματος τοῦ γινόμενου, τοῦ πηλίκου, καὶ ἐν γένει ἀναπτύσσει τοὺς κανόνες τῆς διαφορίσεως οἷαςδήποτε συναρτήσεως· ὁμοίως εὕρισκει τὰ διαφορικά τῶν ἐμβαδῶν τῶν καμπύλων, τῶν τόξων αὐτῶν, τὰ διαφορικά τῶν ὀγκῶν κτλ. ἐκ δὲ τῶν διαφορικῶν τούτων ἐπιστρέφων εἰς τὰ ἀρχικὰς συναρτήσεις εὕρισκει τὰ γεωμετρικὰ ταῦτα μεγέθη, ὡς καὶ σήμερον γίνεται.

Οὕτως ἔλυσε διὰ τρόπον ἀπλουτικῆτος καὶ γενικωτάτου οὐ μόνον τὸ πρόβλημα τῶν ἐφαπτομένων καὶ τὸ πρόβλημα τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων, περὶ τὰ ὅποια περιστρέφοντο αἱ προσπάθειαι τῶν προγενεστέρων αὐτοῦ, ἀλλὰ καὶ ἄλλα πάμπολλα ζητήματα ἀνήγαγεν εἰς ζητήματα διαφορίσεως ἢ εἰς τὰ ἀντίστροφά αὐτῆς.

Δίχαιον εἶνε νὰ μὴ παρελθῶμεν ἐν σιγῇ καὶ τὸ μέρος τοῦ φιλοσόφου καὶ μαθηματικοῦ Λαίβνιτιου ἐπὶ τῆς ἀναπτύξεως καὶ διαμορφώσεως τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ. Ἄν καὶ ὁ Νεύτων ἀπὸ τοῦ 1666 ἦτο κάτοχος τῆς μεθόδου του, ἐν τούτοις δὲν εἶχε δημοσιεύσει αὐτήν, μόνον εἰς τινὰς φίλους του εἶχεν ἀνακοινώσει τὴν μεθόδόν του, ἢ μᾶλλον μερικὰ τινὰ ἐξαγόμενα τῆς μεθόδου του· ὡς δὲ ἐξάγεται ἐξ ἐγγράφων ἱστορικῶν, εἶχεν ἀνακοινώσει καὶ πρὸς τὸν Λαίβνιτιον ἐν ἐπιστολῇ τινὶ τὴν λύσιν διαφόρων σπουδαίων προβλημάτων μετὰ τινων νύξεων περὶ τῆς μεθόδου του, ἔγραψε δηλαδὴ, ὅτι ἔχει μεθόδόν τινὰ γενικὴν, δι' ἣς δύναται νὰ εὕρῃ τὴν ἐφαπτομένην πάσης καμπύλης, τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς, τὸ μήκος τοῦ τόξου αὐτῆς κτλ. Ταῦτα καὶ μόνον ἤρκεσαν πιθανῶς εἰς τὸν ἔξοχον τοῦ Λαίβνιτιου νοῦν, ἵνα ἀνεύρῃ καὶ διαπλάσῃ καὶ δώσῃ ἰδίαν μορφήν εἰς τὸν διαφορικὸν λογισμόν· διότι ἡ κατ' αὐτοῦ βαρεῖα κατηγορία τῶν ὀπαδῶν

τοῦ Νεύτωνος, ὅτι ἦτο ἐν πλήρει γνώσει τῆς μεθόδου τοῦ Νεύτωνος καὶ παρουσίασεν αὐτὴν ὡς ἰδικήν του, (τῷ 1684) δὲν ἀπεδείχθη ἱστορικῶς· μάλλον δὲ πρέπει νὰ ἀποδοθῇ εἰς τὸν ἐρεθισμὸν, τὸν ὁποῖον παρήγαγεν ἡ ἐπισυμβῆσθαι εἰς ὅστε ὁ Λεϊβνίτιος πρέπει νὰ θεωρηθῇ, ἂν ὅχι ὡς ἀνακαλύψας, τοῦλάχιστον ὅμως ὡς συντελέσας, δεύτερος αὐτὸς μετὰ τὸν Νεύτωνα, εἰς τὴν ἀνάπτυξιν καὶ διαμόρφωσιν τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ.

Ὁ Λεϊβνίτιος ἐξέθηκε τὸν διαφορικὸν λογισμὸν κατ' ἄλλον τρόπον μάλλον σύμφωνον πρὸς τὰς φιλοσοφικὰς ἰδέας του· ἐν ᾧ ὁ Νεύτων, ἵνα παρυστήσῃ τὰ μεταβλητὰ ποσά, μεταχειρίζεται καμπύλας, καὶ ἵνα καταστήσῃ κίνητάς τας μεταβολὰς αὐτῶν, θεωρεῖ τὴν κίνησιν, ὁ Λεϊβνίτιος, ἀποβαλὼν τὰ γεωμετρικὰ καὶ μηχανικὰ ταῦτα μέσα, ὡς ξένα τῆς οὐσίας τοῦ διαφορικοῦ, θεωρεῖ αὐτὰ κατ' ἐκείνα τὰ μεταβλητόμενα ποσά, ἀγόμενος ὅμως ὑπὸ τῶν φιλοσοφικῶν του ἰδεῶν παρὰδέχεται ἀπειροστικά, ὅχι ὡς ἐννοοῦμεν ἡμεῖς αὐτὰ σήμερον, ἀλλ' ὡς ποσότητας τόσον μικράς, ὥστε νὰ δύνανται ἀνευ βλάβης ἐπισθητῆς νὰ παραλείπωνται ἐνώπιον τῶν ἄλλων· κατ' αὐτὸν τὰ διαφορικά, εἴτινα πρὶν διὰ τοῦ συμβόλου d , εἶνε αὐταὶ αἱ ἀπειροστικαὶ αὐξήσεις π. χ. ἡ αὐξήσις τοῦ x εἶνε κατ' αὐτὸν μόνον $2x$ · διότι τὸ τετράγωνον τοῦ dx παραλείπεται ὡς ἀπειροστὸν σχετικῶς πρὸς τὸ $2x$ · τοῦτο ὑπὸ τὴν μαθηματικὴν ἐποψιν δὲν φαίνεται ἐντελῶς ἀκριβές, ἔχει ὅμως τὸ πλεονέκτημα ὅτι ἄγει συντομώτερον καὶ ἀπλούστερον εἰς τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα, εἰς τὰ ὁποῖα ἄγει καὶ ἡ ἄλλη μέθοδος, ἡ τοῦ Νεύτωνος· ἦτις, ἀληθῶς, εἶνε ἀπηλλαγμένη πάσης ἐντρυφήσεως· διότι αἱ ῥοαὶ δὲν εἶνε ἀνάγκη νὰ ὑποτεθῶσιν ἀπειροστικαὶ ἀλλὰ δύνανται νὰ εἶνε οἷαιδήποτε.

Τοσούτα ὡς πρὸς τὴν εὔρεσιν τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ καὶ ὡς πρὸς τὰς ἰδέας τοῦ Νεύτωνος καὶ τοῦ Λεϊβνιτίου περὶ τῶν πρώτων αὐτοῦ ἀρχῶν· πῶς δὲ ἡ σημερινὴ θεωρία καταρθεῖ νὰ συνενώσῃ τὴν σαφήνειαν τῆς μεθόδου τοῦ Νεύτωνος μετὰ τῆς συντομίας τῆς μεθόδου τοῦ Λεϊβνιτίου, καὶ πῶς μικρὸν κατὰ μικρὸν ἀναπτύσσεται καὶ προχωρεῖ ὁ διαφορικὸς λογισμὸς, καὶ ποῖα προβλήματα λύει, ταῦτα θέλουσιν ἀποτελέσει τὸ θέμα τῶν ἐπομένων μαθημάτων.