ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΑ.

Τὰ μαθηματικὰ ἀπὸ τῶν ἀρχαιοτάτων χρόνων μέχρι τοῦ τέλους τοῦ ΙΒ΄ αἰῶνος.

Ἀρτίως ἐξεδόθη τὸ δεύτερον ἡ Ἱστορία τῶν μαθηματικῶν (Vorlesungen über Geschichte der Mathématik. Erster Band, Zweite Auflage.—Leipzig, 1894), τοῦ κ. Moritz Cantor, ἐν ᾗ ὁ συγγραφεὺς σπουδαίας ἐποιήσατο συμπληρώσεις καὶ τροποποιήσεις, συνῳδὰ ταῖς ἐσχάτως γενομέναις ἱστορικαῖς ἀνακαλύψεσι. Τοῦ σοβαροῦ τούτου ἔργου ἐξετυπώθη ἤδη ὁ πρῶτος μόνον τόμος, περιέχων τὴν ἱστορίαν τῶν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς μέχρι τοῦ 1200 μ. Χ. γνώσεων τοῦ ἀνθρώπου ἐν τῷ σπουδαιοτάτῳ τούτῳ τῆς ἀνθρωπίνου σοφίας κλάδῳ κατὰ τὴν ἑξῆς σειρὰν καὶ διαίρεσιν: 1) Αἴγυπτος, 2) Βαβυλών, 3) Ἑλλὰς καὶ Βυζαντινὴ ἐποχή, 4) Ρώμη μέχρι τῆς πτώσεως τοῦ Δυτικοῦ κράτους, 5) Ἰνδίαι, 6) Σινική, 7) Μουσουλμανικὸς κόσμος καὶ 8) Μεσαίων ἐν Εὐρώπῃ.

Περίληψιν τοῦ περιεχομένου τοῦ τόμου τούτου παρέχομεν ἀσμένως τοῖς ἡμετέροις ἀναγνώσταις, βασιζόμενοι, ἐλλείψει αὐτοῦ τούτου τοῦ κειμένου, ἐπὶ τῆς ὑπὸ τοῦ μηχανικοῦ καὶ καθηγητοῦ τῶν μαθηματικων ἐν τῷ πανεπιστημίῳ τῆς Λυὼν κ. Léon Autonne γενομένης ἀναλύσεως τοῦ σοβαροῦ τούτου ἔργου.

Αἴγυπτος.—Οἱ Αἰγύπτιοι ἐχρησιμοποίησαν τὰ μαθηματικὰ εἰς τὰς ἀνάγκας τοῦ ἐμπορίου καὶ τῆς γεωργίας. Ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς ἐγίνωσκον τῆς πράξεις ἐπὶ τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἐχρησιμοποίουν ἰδίᾳ τοὺς ἔχοντας ἀριθμητὴν τὴν μονάδα, εἶχον δὲ κατασκευάσει πίνακας καὶ κανόνας, δι' ὧν ἐτελεῖτο ἡ ἀποσύνθεσις οἱουδήτινος κλάσματος εἰς σύνολον τοιούτων κλασματικῶν μονάδων. Τὰ ἀριθμητικὰ σύμβολα, ειδικὰ δι' ἕκαστον ἀριθμόν, ἦσαν κατὰ τὸ πλεῖστον παράδοξα. Οὕτως ὁ ἀριθμὸς 100000 παρίστατο διὰ βατράχου, τὸ ἑκαττομμύριον δι' ἀνθρώπου ἔχοντος ὑψωμένας τὰς χεῖρας πρὸς τὸν οὐρανὸν ἐν στάσει ἐκτάκτου ἐκπλήξεως, τὸ δὲ κλάσμα $1/4$ ἐσημειοῦτο διὰ τοῦ συμβόλου τοῦ 4, ὑπεράνω τοῦ ὁποίου ἐτίθετο τελεία. Ἐκ τῆς Ἀλγέβρας ἐγίνωσκον τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τοῦ 1ου βαθμοῦ, ἐκ δὲ τῆς Γεωμετρίας τὴν μέτρησιν τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἁπλουστάτων ἐπιπέδων σχημάτων διὰ τύπων ἐνίοτε ἐσφαλμένων (οἷον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ ἡμίσεος τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος). Ὡς λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον (π), ἐλάμβανον τὸν ἀριθμὸν $\left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}1604\ldots$, ἀντὶ τοῦ $3{,}1415926\ldots$, ἐπίσης δὲ ἐγίνωσκον ὅτι τὸ τρίγωνον τὸ ἔχον πλευρὰς τοὺς ἀριθμοὺς 3, 4, 5 εἶνε ὀρθογώνιον.

Βαβυλών.—Αἱ περὶ Βαβυλωνίων ἡμέτεραι εἰδήσεις εἶνε ὀλιγώτεραι τῶν περὶ Αἰγυπτίων. Ἡ ἀριθμησις αὐτῶν εἶχε βάσιν τὸν ἀριθμὸν 60, ἐντεῦθεν δὲ παρέμεινε παρ' ἡμῖν ἡ διαίρεσις τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου εἰς 360 μοίρας, ἡ τῆς μοίρας εἰς 60 λεπτά, κτλ. Οἱ ἀριθμοὶ ἐσημειοῦντο διὰ συνδυασμοῦ σφηνοειδῶν συμβόλων, δὲν εὑρέθησαν δὲ ἔτι ἀναγεγραμμένοι ἀριθμοὶ ὑπερβαίνοντες τὸ ἑκατομμύριον. Ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ ἐγίνωσκον ἰδίᾳ τὴν ἐν κύκλῳ ἐγγραφὴν τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου, ὡς τιμὴν δὲ τοῦ π ἐλάμβανον ἁπλῶς τὸν ἀριθμὸν 3, ταυτίζοντες οὕτω τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου μετὰ τοῦ ἔχοντος τὰ αὐτὰ πέρατα τόξου.

Ἑλλάς.— Οἱ Ἕλληνες κατέχουσιν ἐν τῷ ἔργῳ τοῦ κ. Cantor τὴν τιμητικὴν θέσιν, εἰς δὲ τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν μόνων τούτων διατίθησιν ὁ συγγραφεὺς πλέον τῶν $2/5$ τοῦ ὅλου αὐτοῦ τόμου (377 σελίδας ἐπὶ 883). Ἐπὶ τῆς ἱστορίας τῆς ἑλληνικῆς ἐπιστήμης ὁ κ. Autonne περιορίζεται εἰς τὴν ἀναγραφὴν τῶν ἑπομένων συντόμων γενικῶν παρατηρήσεων, καθ' ὅσον θεωρεῖ ταύτην ἀρκούντως γνωστὴν τοῖς συμπατριώταις αὐτοῦ Γάλλοις διὰ τῶν ἔργων ἰδίᾳ τοῦ κ. Tannery. Αἱ γενικαὶ αὗται παρατηρήσεις τοῦ ἐκ Λυῶνος καθηγητοῦ εἰσὶν αἱ ἑξῆς:

Αον. Αἱ μαθηματικαὶ ἐπιστῆμαι ὡς καὶ ἡ θρησκεία τῶν Ἑλλήνων δὲν εἶνε πρωτότυποι καὶ αὐτόχθονες, παρέλαβον δὲ ταύτας παρὰ τῶν Αἰγυπτίων καὶ Βαβυλωνίων καὶ ἐπὶ μακρὸν παρέμειναν ἐν τῇ σχολῇ ταύτῃ. Δίκαιον ὅμως νὰ σημειωθῇ ὅτι σημαντικῶς ὑπερηκόντισαν τοὺς διδασκάλους αὐτῶν.

Βον. Οἱ ἀρχαιότεροι τῶν μαθηματικῶν, οἷον ὁ Θαλῆς, ὁ Πυθαγόρας, ὁ Πλάτων, κτλ., ἦσαν συνάμα ὡς καὶ ὁ Καρτέσιος, ὁ Λεϊβνίτιος, κτλ., καὶ φιλόσοφοι, ἡ δὲ ειδικότης ἀνεφάνη βραδύτερον μετὰ τοῦ Εὐκλείδου, τοῦ Ἀρχιμήδους καὶ τῶν λοιπῶν,

Γον. Ἡ μεγάλη τῶν Ἑλλήνων ἀξία ἔγκειται ἐν τῷ ἀποχωρισμῷ τῶν μαθηματικῶν ἀπὸ τῶν βιωτικῶν ἐφαρμογῶν αὐτῶν καὶ τῇ ἐν τέλει ἱδρύσει ἀφηρημένης ἐπιστήμης. Εἰς τούτους ὀφείλεται περίπου ἡ σύστασις τῶν νῦν καλουμένων στοιχειωδῶν μαθηματικῶν, διεκρίθησαν δὲ μᾶλλον ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ ἢ ἐν τῷ ἀλγεβρικῷ ἢ ἀναλυτικῷ λογισμῷ. Τοὐναντίον τούτου συνέβη παρὰ τοῖς Ἰνδοῖς, ἡ δὲ τῶν Ἑλλήνων γεωμετρικὴ ἰδιοφυΐα εἶνε πιθανῶς ἡ ἐκδήλωσις τῆς ζωηρᾶς καὶ ἀκριβοῦς ἐκ μέρους αὐτῶν γνώσεως τῆς ἐξωτερικῆς τῶν ἀντικειμένων μορφῆς, εἰς ταύτην δὲ τὴν γνῶσιν ὀφείλεται καὶ ἡ ἀξιοσημείωτος αὐτῶν ἀνάδειξις ἐν ταῖς πλαστικαῖς τέχναις.

Τὴν περὶ τῆς ἱστορίας τῶν ἑλληνικῶν μαθηματικῶν γνώσεων ἀνάλυσιν συμπληροῖ ὁ κ. Autonne ἀναγράφων τὴν ἑπομένην περίεργον παρατήρησιν. Ὅταν διὰ τῆς σχολῆς τοῦ Πυθαγόρου εἰσήχθησαν ἐν τοῖς μαθηματικοῖς τὰ ἀτελῆ τετράγωνα καὶ οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ (οἷον ἡ διαγώνιος τοῦ τετραγώνου ἐν σχέσει πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ), ἡ μελέτη τούτων περιεβλήθη δι' εἴδους τινὸς μυστηριώδους φρίκης. Διηγοῦντο ὅτι οἱ σοφοὶ οἱ ἐμβαθύναντες εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν καὶ προβάντες εἰς τὴν μέτρησιν τοῦ ἀνεκφράστου, ἐκείνου, ὅπερ ἡ φύσις ἐθεώρησε καλὸν ν' ἀποκρύψῃ, ἀπώλοντο ἐν ναυαγίοις ἢ ἔσχον ἕτερον κακὸν τέλος. Τοῦτο προσεγγίζει πως πρὸς τὴν ἀντιπάθειαν, ἣν πολλοὶ καὶ σήμερον ἔτι τρέφουσι κατὰ τῆς μὴ Εὐκλειδείου γεωμετρίας ἢ τῶν φανταστῶν λεγομένων ποσοτήτων. Πιθανὸν δὲ εἶνε ὅτι, ὅτε κατὰ τοὺς προϊστορικοὺς χρόνους εὑρέθησαν οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοί, αἱ αὐταὶ παρετηρήθησαν ἀντιπάθειαι.

Ῥώμη. — Μετὰ τῆς Ῥώμης ἐπαναπίπτομεν εἰς τὴν ἐπιστήμην τοῦ χρησίμου, ἐν δὲ τῇ ἱστορίᾳ αὐτῆς δὲν ἔχομεν ν' ἀναγράψωμεν ἢ ἐνδιαφέροντά τινα βοηθητικὰ πρὸς ἐκτέλεσιν τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων μέσα (ἄβακες, κτλ.). Τὰ κλάσματα, ἰδίᾳ δὲ τὰ δυωκαιδεκαδικά, ἦσαν ἐν μεγάλῃ χρήσει, ἰδιαίτερα δὲ δι' ἕκαστον τούτων ὑπῆρχον ὀνόματα. Ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ ἡ Ῥώμη περιωρίσθη εἰς τὴν χωρομετρίαν, κατὰ δὲ τὴν διανομὴν τῶν γαιῶν καὶ τὴν ἀνέγερσιν τῶν ναῶν ἐγίνετο χρῆσις καθέτων ἀξόνων συντεταγμένων, ὧν ὁ ἕτερος διηυθύνετο κατὰ τὸν μεσημβρινόν.

Ἰνδίαι. — Λίαν ἀτελῶς γινώσκομεν τὴν ἐν τοῖς ἀφῃρημένοις μαθηματικοῖς ἰνδικὴν παραγωγήν, τὰ δὲ ὀλίγα περὶ ταύτης γνωστὰ εἶνε τοιαύτης φύσεως, ὥστε ζωηρότατα νὰ ἐξερεθίσωσι τὴν ἡμετέραν περιέργειαν. Ἡ διασκεπτική, λεπτὴ καὶ ὑπομονητικὴ ἰνδικὴ διάνοια, ὑπὸ ἀνεξαντλήτου φαντασίας βοηθουμένη, φαίνεται ἐκ προτέρων καταπληκτικῶς ἐπιτηδεία ἐν ταῖς μαθηματικαῖς θεωρίαις· ἀλλὰ ταῦτα οὐδὲν ἕτερον εἶνε ἢ πιθανότητες ὀλίγον ἠκριβωμέναι, καθ' ὅσον τὰ ἱστορικὰ τεκμήριά εἰσιν ὁλοσχερῶς ἀνεπαρκῆ καὶ ἐλλιπῆ.

Οἱ ἀρχαιότεροι τῶν ἐν τῇ Ἰνδικῇ μαθηματικῶν, ὧν τὰ ἔργα κατέχομεν, εἶνε μεταγενέστεροι τῆς ἀρχῆς τῆς ἡμετέρας χρονολογίας (ὁ Aryabhatta, γεννηθεὶς τῷ 476 μ. Χ. καὶ ὁ Brahmagupta, γεννηθεὶς τῷ 598), φαίνονται δὲ γνωρίσαντες τὰς ἑλληνικὰς πηγάς. Ἀλλὰ τίς προηγήθη τοῦ Aryabhatta; Εἰς τὴν ἐρώτησιν ταύτην οὐδεμία εἰσέτι ἐδόθη ἀπάντησις.

Ὁπωσδήποτε ἰδοὺ ἐν γενικαῖς γραμμαῖς τὸ πιθανῶς σχετικὸν πρὸς τὴν τῶν Ἰνδῶν ἐν τοῖς μαθηματικοῖς θέσιν:

Ἐὰν οἱ Ἕλληνες διεκρίθησαν ἰδίᾳ ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ, οἱ Ἰνδοὶ μετὰ πάθους ἠσχολήθησαν περὶ τὴν μελέτην τοῦ ἀριθμοῦ. Ἡ γλῶσσα αὐτῶν ἔχει εἰδικὰ ἀριθμητικὰ ὀνόματα μέχρι τοῦ 10^{23}, οἱ δὲ βραχμᾶνοι καὶ βουδδισταὶ θεολόγοι καταπληκτικὴν ποιοῦνται χρῆσιν τῶν ὑπερμεγέθων ἀριθμῶν. Οἱ Ἰνδοὶ ἀνεκάλυψαν τὸ ἡμέτερον ἀριθμητικὸν σύστημα, τὴν σχετικὴν ἀξίαν τῶν ψηφίων καὶ τὸ μηδέν.

Ἐν δὲ τῇ Ἀλγέβρᾳ οἱ Ἰνδοὶ ἐγνώρισαν ἐν ἄλλοις τὰς ἀριθμητικὰς προόδους, τὴν ἀόριστον ἀνάλυσιν τοῦ πρώτου βαθμοῦ (λύσιν τῶν ἐξισώσεων μετ' ἀκεραίων ῥιζῶν), τὴν διπλῆν ῥίζαν καὶ τὴν περίπτωσιν τοῦ ἀδυνάτου τῆς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, κυβικάς τινας ἐξισώσεις καὶ τὰ στοιχεῖα θεωρίας τινὸς τῶν ἀριθμῶν, ἔτι δὲ τὰς ἀρνητικὰς ποσότητας καὶ τὸ ἄπειρον, προερχόμενον ἐκ κλασμάτων ἐχόντων παρονομαστὴν μηδέν. Ἐπίσης ἐγίνωσκον ὅτι ἡ ἀξία τοιούτου τινὸς κλάσματος δὲν μεταβάλλεται διὰ τῆς εἰς αὐτὸ προσθέσεως οἱασδήτινος πεπερασμένης ποσότητος.

Ἐν δὲ τῇ Γεωμετρίᾳ τὰ μέσα τῆς ἀποδείξεως συνήθως στηρίζονται ἐπὶ τοῦ μετασχηματισμοῦ τῶν τύπων, οὕτω δὲ ἐν τούτοις δύναταί τις νὰ ἴδῃ τὴν πρώτην ὑποτύπωσιν τῶν ἐπὶ τῆς ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας ἰδεῶν τοῦ Viète καὶ τοῦ Καρτεσίου. Ἐλάμβανον ὡς τιμὴν τοῦ π τὸν ἀριθμὸν 3,1416, ὅπερ παρέχει ἤδη μεγίστην προσέγγισιν.

Ἐπίσης οἱ Ἰνδοὶ ἠσχολήθησαν καὶ περὶ τὴν εὐθύγραμμον τριγωνομετρίαν κατασκευάσαντες καὶ πίνακας ἡμιτόνων.

Σινική. — Οἱ Σῖναι ὡς καὶ οἱ Ῥωμαῖοι ἀντιπροσωπεύουσι τὴν τελείαν ἐν τοῖς μαθηματικοῖς ἀνικανότητα.

Ἄραβες. — Ὁ μουσουλμανικὸς κόσμος τοῦ μεσαίωνος ἔδειξεν ἱκανὴν ἐπιδεκτικότητα εἰς τὰς ἀφῃρημένας ἐρεύνας καὶ ἀπλήστως ἀφωμοίωσε τὴν ἐν τούτοις ἑλληνικὴν καὶ ἰνδικὴν σοφίαν. Οἱ Ἄραβες ἐτελειοποίησαν τὴν ἐπίπεδον καὶ σφαιρικὴν τριγωνομετρίαν, ἀλλ' ἡ μεγίστη δόξα αὐτῶν παρὰ τοῖς μεταγενεστέροις εἶνε ἡ δι' αὐτῶν γενομένη εἰς τὴν Εὐρώπην μεταφορὰ τῶν ἔργων τῶν Ἑλλήνων καὶ τῶν ἀ ρ α β ι κ ῶ ν, ἤτοι ἰνδικῶν συμβόλων μετὰ τοῦ συγχρόνου συστήματος τῆς ἀριθμήσεως.

Λύσις. — Τὴν ἀνάλυσιν καὶ περίληψιν τοῦ Α' τόμου τῆς ἱστορίας τῶν μαθηματικῶν τοῦ κ. Μ. Cantor συμπληρῶν ὁ κ. Autonne ὁμιλεῖ ἐν γενικαῖς γραμμαῖς περὶ τῆς εἰς τὰ μαθηματικὰ γενομένης ἐργασίας ἐν τῇ Δυτικῇ Εὐρώπῃ ἀπὸ τῆς πτώσεως τοῦ ῥωμαϊκοῦ κράτους μέχρι τοῦ τέλους τοῦ ΙΒου αἰῶνος, ἐργασίας μικρᾶς τῷ ὄντι σημασίας καὶ ἀξίας. Ὡς αἴτιον τούτου ἀναγράφει οὐ μόνον τὸ ἀντίξοον τῶν καιρικῶν περιστάσεων, ἀλλὰ καὶ τὴν ἐκ μέρους τῆς Ῥώμης ἀδυναμίαν τοῦ νὰ μεταδώσῃ εἰς τὰς ὁμοδόξους αὐτῇ χώρας τὸν πρὸς τὰς ἀφῃρημένας ἐρεύνας ἔρωτα, οὗτινος αὐτὴ αὕτη ἐστερεῖτο. Ὁπωσδήποτε θεωρεῖ ἀναγκαῖον νὰ σημειώσῃ μεταξὺ τῶν εἰς τὰ μαθηματικὰ κατὰ τὴν ἐποχὴν ἐκείνην ἀσχοληθέντων τὸν Gerber d' Aurillac, πάπαν ὑπὸ τὸ ὄνομα Σιλβέστρου τοῦ Βου (999—1003).

Ἀλλ' ὀλίγον κατ' ὀλίγον, εἴτε διὰ τῶν Ἀράβων, εἴτε καὶ ἀμέσως, ἐγνώρισαν τὰ ἔργα τῶν Ἑλλήνων, συγχρόνως δὲ εἰσήγαγον καὶ τὸ σύγχρονον σύστημα τῆς ἀριθμήσεως. Οὕτως ἡ δυτικὴ Εὐρώπη, κατέχουσα ἤδη τὴν κληρονομίαν τῶν προγόνων αὐτῆς, δύναται νὰ προβῇ εἰς τὴν συνέχισιν τοῦ ἔργου ἐκείνων, καὶ τότε, περὶ τὸ 1200, ἄρχεται μετὰ τοῦ ἐκ Πίσσης Λεονάρδου ἡ μεγάλη τῶν νεωτέρων μαθηματικῶν κίνησις, ἥτις συνεχῶς αὐξανομένη οὐδόλως πλέον ἀνακοπήσεται.

Τὴν ἀνάλυσιν ταύτην κλείων ὁ κ. Autonne καταλήγει εὐχόμενος ὑπὲρ τῆς ταχείας συμπληρώσεως τοῦ μεγάλου ἔργου τοῦ κ. Cantor.

ΗΛ. Γ. ΒΑΛΣΑΜΑΚΗΣ